Bollettino Unione Matematica Italiana

Anna Anselmo

Intorno ad alcune proprietà della funzione numerica $N(k; n)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 248–249.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_248_0>

Intorno ad alcune proprietà della funzione numerica $N(k, n)$.

Nota di ANNA ANSELMO (a Palermo).

Sunto. - *Si richiamano alcune proprietà note della funzione suddetta ed altre se ne aggiungono di carattere asintotico.*

In due Note pubblicate quest'anno nei fascicoli 2 e 3 di questo « Bollettino », FERENC KÀRTESZI ha rilevato, prima per via geometrica, poi in base a considerazioni aritmetiche, che la funzione numerica $N(k, n)$ definita ponendo:

$$N(k, n) = k^n - \sum_i k^{\frac{n}{p_i}} + \sum_{i,j} k^{\frac{n}{p_i p_j}} - \dots \tag{1}$$

dove k ed n sono interi positivi ($n \geq 2$ e k qualunque) e le Σ si estendono alle combinazioni ad 1 ad 1, a 2 a 2,... dei diversi fattori primi p_1, p_2,... di n, è divisibile per n.

Poichè di questa e di altre proprietà della funzione $N(k, n)$ io mi occupai in un lavoro del 1928 [1], credo che possa riuscire interessante pei lettori di questo « Bollettino » un breve riesame di queste proprietà e di qualche altra avente carattere asintotico.

1. Osservo innanzi tutto che la funzione $N(k, n)$ (con k reale qualunque) è la derivata numerica di k^n e per conseguenza il suo integrale numerico, cioè la somma dei valori che essa prende pei diversi divisori d di n, è uguale a k^n:

$$\sum_d N(k, d) = k^n. \tag{2}$$

2. Per k intero, positivo, la funzione stessa si presenta in varie questioni; così per esempio il prodotto

$$\frac{k-1}{n} N(k, n) \tag{3}$$

esprime il numero dei polinomi in x di grado n irriducibili in un corpo finito d'ordine k (k potenza di un numero primo) e poichè di siffatti polinomi ne esistono sempre, ne risulta $N(k, n) > 0$. Inoltre dalla (3) segue facilmente che $N(k, n)$ è divisibile per n.

[1] A. ANSELMO, *Sulla derivata numerica rispetto ad* m *di* N^m. « Giornale di Matematiche di Battaglini », serie 3ª, n. 20.

Ora la proprietà $N(k, n) > 0$ fu stabilita da me, per k reale qualunque, in base a considerazioni aritmetiche nel lavoro citato, e così pure la divisibilità per n di $N(k, n)$ per k intero; ma questa proprietà, come ivi rilevai, era stata già segnalata dal SERRET per k primo e dal PICQUET e dal LUCAS per k intero qualunque [1].

3. Se si chiama *indicatore* d'ordine s del numero n e si denota con $\varphi_s(n)$ la derivata numerica di $\binom{n}{s}$, cioè

$$\varphi_s(n) = \binom{n}{s} - \sum_i \binom{\frac{n}{p_i}}{s} + \sum \binom{\frac{n}{p_j p_k}}{s} - \ldots$$

e nell'espressione (1) si pone $k = 1 + \delta$, sviluppando i vari termini secondo la formula del binomio, si ottiene per $n > 1$:

$$N(k, n) = \varphi_1(n)(k-1) + \varphi_2(n)(k-1)^2 + \ldots + \varphi_n(n)(k-1)^n. \tag{4}$$

Poichè, com'è noto:

$$\binom{n-1}{s-1} \leq \varphi_s(n) < \binom{n}{s},$$

con semplici considerazioni si trae dalla (4) la limitazione (valida per $k > 1$ ed $n > 1$):

$$k^n - k^{n - \frac{n}{\nu}} < N(k, n) < k^n - 1,$$

essendo ν il prodotto dei fattori primi diversi di n.

E se ne trae che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N(k, n)}{k^n} = 1.$$

Nella citata Nota ho anche dimostrato *che si ha pure, per* $\mathrm{k} \geq 2$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(k, n)}{k^n} = 1,$$

e che per $\mathrm{k} > 1$ *la differenza*

$$k^n - N(k, n)$$

è una quantità positiva e, rispetto ad n, *dell'ordine di* $\mathrm{nk}^{\frac{n}{2}}$.

[1] SERRET, « Nouv. Ann. Math. », serie 1ª, vol. 14, pag. 261 (1885); PICQUET e LUCAS, « C. R. Acad. Sc. Paris », vol. 96, pagg. 1139, 1300, 1424 (1883).