Recensioni

* Friedrich Schilling: Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie (L. Berzolari)
* Maurice Legat: Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours (Ettore Bortolotti)
* J. A. Schouten. D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie (Enea Bortolotti)
* V. Hlavaty: Les courbes de la variété générale à n dimensions (Enea Bortolotti)
* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Enea Bortolotti)
* Richard C. Tolman: Relativity, Thermodynamics and Cosmology (U. Crudeli)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 250–265.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_250_0>

RECENSIONI

FRIEDRICH SCHILLING: *Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie.* B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935, parte I, 2ª ed., pp. V—72, con 64 figure nel testo e una tabella di ritratti; parte II, pp. VII—143, con 72 figure nel testo e due tabelle di figure.

Tra le pubblicazioni che negli ultimi anni sono state dedicate alla Geometria non-euclidea, questa del chiaro professore della Scuola superiore politecnica di Danzica è certamente una delle più notevoli e interessanti. È ben noto che delle due Geometrie piane non-euclidee, la Geometria ellittica (di RIEMANN) ammette un'interpretazione nella Geometria euclidea sopra una sfera, mentre la Geometria iperbolica (di LOBATSCHEFSKIJ e BOLYAI) trova un modello euclideo nella Geometria sopra una pseudosfera. La minore semplicità delle nozioni che si riferiscono al secondo caso ha indotto l'Autore a redigere questo libro, con l'intento di dare una trattazione possibilmente elementare e intuitiva della pseudosfera, e quindi della Geometria non-euclidea iperbolica.

Nella prima parte (pp. 1-72), della quale una prima edizione era comparsa nel 1931, è fatto uno studio della pseudosfera per mezzo della sua rappresentazione conforme sul semipiano iperbolico. Vengono determinati i movimenti di questo semipiano, e si studiano le rette, i triangoli e la loro trigonometria, e i cerchi, dopo di che si torna alla considerazione della pseudosfera, assegnando soprattutto, così analiticamente come con metodo geometrico intuitivo, le proprietà delle sue linee geodetiche.

La seconda parte del libro (pp. 73-215) è rivolta ad uno studio approfondito dei cerchi geodetici di 1ª, 2ª e 3ª specie della pseudosfera — caratterizzati sia come linee di costante distanza geodetica da un punto fisso, sia come linee di curvatura geodetica costante — e altresì a porre in chiara luce il legame tra la Geometria sulla pseudosfera e la Geometria iperbolica nel piano proiettivo con la sua conica assoluta reale. Particolarmente interessanti i capitoli che trattano delle sviluppabili circoscritte alla pseudosfera lungo cerchi geodetici. Nello sviluppo di una tale sviluppabile, i cerchi geodetici si mutano in cerchi euclidei: ciò che fornisce la possibilità di ottenere le linee e i cerchi geodetici sopra un modello di pseudosfera mediante una costruzione pratica di estrema semplicità. Notevole pure la via elementare, per la quale l'Autore mostra potersi stabilire la Geometria sulla pseudosfera con la diretta considerazione della superficie, indipendentemente dalle rappresentazioni usate in precedenza.

Il libro è piccolo di mole, ma ricco di contenuto, in molte parti originale. Gli svolgimenti analitici sono sempre accompagnati da suggestive considerazioni geometriche intuitive, illustrate da numerose figure.

Tutta l'opera appare accuratamente pensata anche nei minimi particolari, ed è ammirabile per la semplicità e la perspicuità con le quali i concetti e i procedimenti, sì analìtici che geometrici, sono posti e sviluppati.

Il carattere elementare che l'Autore ha cercato di darle ne facilita la lettura, alla quale aggiungono attrattiva l'accuratezza della stampa e la nitidezza delle figure. Nè sono da dimenticare le tabelle premesse alle due parti, di cui l'una contiene i ritratti di nove dei matematici (tra i quali il nostro BELTRAMI) che hanno maggiormente contribuito alla costituzione e ai progressi della Geometria non-euclidea, e le altre due dànno le immagini delle linee geodetiche, dei cerchi geodetici e dei loro fasci, e dei triangoli asintotici della pseudosfera. L. BERZOLARI

MAURICE LECAT: *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours.* (Bruxelles, Louvain, 1935). Librairie E. Dubaret, 24 Rue de Namur, Louvain.

Gli errori segnalati dal LECAT, dalle origini sino ai nostri giorni, sono 476: pochi, per così gran lasso di tempo, e per 330 matematici, chè tanti furono quelli esaminati dall'A. Più della metà di quegli errori si riferiscono alla *Aritmologia*, scienza che tratta della ricerca dei numeri perfetti, delle coppie di numeri amici, del grande teorema di FERMAT,... dei superdeterminanti,... nella quale il LECAT ha specialissima competenza.

Ma quegli errori sarebbero stati troppi, perchè di essi si potesse fare l'esame e la discussione richiesti per la investigazione delle cause, per lo studio della frequenza di quelli che si possono dire consuetudinarii, di quelli che nemmeno uomini di genio seppero evitare; per la ricerca di qualche indizio sui lati oscuri della psicologia del matematico e sui punti deboli del meccanismo delle deduzioni logiche e delle induzioni che conducono alla invenzione ed alla scoperta.

Il LECAT dice di aver raccolto solo... « *les erreurs logiques qui ont encore plus ou moins cours...* » : trovo infatti segnalati errori di stampa e di calcolo, che veramente hanno ancora corso, e lo avranno sempre, ma che non metterei fra gli errori logici.

Spesso la segnalazione viene fatta col dire che nella tale opera ci sono errori,... ; quali poi non è detto, solo è dato riferimento bibliografico dell'opera dove gli errori furono rilevati e corretti. Il lettore dovrebbe avere a disposizione una intera biblioteca, e tempo e pazienza da perdere.

Facciamo qualche esempio, ricavato da autori di grido :

(2) ABEL : *Fonctions abéliennes.* Oeuvres, T. I, p. 145–211. Erreurs signalées par SYLOW et LIE, éditeurs des oeuvres d'ABEL. Oeuvres complètes, p. 294–301.

(73) CAUCHY : *Série d'erreurs.* Oeuvres passim... Signalées par Miss. J. BURNS. Math. Monthly, 20 (1913), p. 141–148.

(96) DEGEN : *Canon pellianus.* Erreurs ou errata signalées par A. CUNNINGHAM, Messenger of Math. 46, p. 49–69.

(140) FRESNEL : *Optique.* Quelques inadvertances (?) Oeuvres de FRESNEL II, p. 247. Relevées par M. E. VERDET et par S. D. POISSONS. Oeuvres de FRESNEL. Passim.

(236) LAPLACE : *Calculs.* Oeuvres, T. V, p. 507 E. MAILLET signale ces erreurs de calcul. Interm. Math., 1904, p. 286.

(263) LEIBNIZ : *Mécanique, Principes, Divers mémoires.* E. B. ESCOTT relève l'existence d'erreurs. Interm. 1905, p. 282.

. . . .

Non sempre le indicazioni bibliografiche sono sufficienti, come si vede nei seguenti esempi.

(15) ARONHOLD : *Algèbre. Théorie des formes. Théorème d'Aronhold.* — où ? — A. CLEBSCH constate que la démonstration d'A. est erronée. — où ?

(105) DUHAMEL. Erreurs signalées par A. PRINGSHEIM et J. MOLK. Encycl. Sc. Math. pures et appliquées, éd. fran. (e nulla altro !).

(180) HELMHOLTZ : *Sur les fondements de la géométrie* (axiomes), KILLING (voir à ce mot) commet à peu-près la même faute.

(207) KILLING : *Philosophie des math.* Commet à peu-près la même faute que HELMHOLTZ (voir à ce mot).

Così ne sappiamo come prima !

(382) SACCHERI : Diverses erreurs principielles ? *Euclides ab omni naevo vindicatus...*

Quali errori ??? niente altro è detto.

Ho voluto riscontrare, in qualche caso, per mia curiosità, la esattezza delle segnalazioni, ma sono cascato male.

Eccone un esempio:

(44) BLANCHET: *Manière de...* Voir à EUCLIDE et à LEGENDRE.

(113) EUCLIDE: Géométrie élémentaire. *Manière fautive de tracer une certaine figure composée de triangles.* Géométrie, Livre I. Prop. XXIV. Voir à LEGENDRE.

(250) LEGENDRE: *Manière de tracer une certaine figure composée de triangles.* Eléments de géometrie, Livre I, prop. 10. Cette proposition est la même que la prop. XXIV du Livre I de EUCLIDE. Dr. PROMT, Inter. Math. (I) 12 (1905), p. 278-280.

Ora la prop. XXIV del I di EUCLIDE (del pari che la 10 di LEGENDRE, e la 11 di BLANCHET) dice semplicemente: « *Se due triangoli hanno due lati eguali rispettivamente a due lati, ma gli angoli compresi dalle rette eguali uno maggiore dell'altro, avranno anche la base maggiore della base* ».

E non riesco ad identificare in questo teorema *la manière fautive de tracer une certaine figure composée de triangles.* Non posseggo la collezione dell'*Interm. Math.* ma posseggo molte edizioni di EUCLIDE: dal CAMPANO, dal COMMANDINO, dal CLAVIO, a quelle del BETTI e BRIOSCHI (1867) ed all'ultima uscita, curata dall'ENRIQUES (1925). In tutte trovo il teorema correttamente dimostrato. In quella dello SIMPSON (Glasguae M.DCC.LVI) ed in quella dell'ENRIQUES, si considera un solo caso, in tutte le altre, a me note, si distinguono tre casi, ma sostanzialmente la dimostrazione è sempre la medesima, ed anche in quelle edizioni nelle quali si considera un solo caso non si può dire errata e nemmeno incompleta.

Del LEGENDRE posseggo due edizioni, la 12ma e la 15ma, e del BLANCHET, la 2a, la dimostrazione e la costruzione sono esenti da errori. Dubito che qui il LECAT abbia preso un *qui pro quo*; ma in ogni caso doveva spiegarsi meglio.

Singolare l'*errore matematico* (?) segnalato nelle opere di Sant'AGOSTINO, di ALCUINO, di HEILBRONNER: « *6 étant nombre parfait. Dieu a fait la création en 6 jours plutôt qu'en 1* ».

Ma incomprensibili, in un'opera matematica, sfuriate del genere di quelle che trovo per HALPHEN e per MONGE:

(174) HALPHEN: ...1870 capit. d'artill,... 86,... *à sa demande réintégré dans le serv. milit. actif!!!* Si haute que soit notre admiration pour le *Traité des fonctions elliptiques*, qui est vraiment œuvre de grand mathématicien nous devons considérer H., ainsi que ceux de son acabit, comme *néfastes au progrès de l'Humanité.* Il n'est

peut-être pas mauvais, surtout au moment où la course aux armements bat son plein, de proclamer que « *tous gens de guerre, si braves gens soient-ils, doivent être considérés comme la peste* ».

« Remarque déplacée, ici? Bien sûr... ».

E allora?

(308) MONGE: Un des créateurs de l'Ec. Polyt..., on peut ajouter qu'il a inventé la géométrie descriptive, *science* (?) *qui pue l'Ecole Militaire*... (lascio la tirata che segue, per non disturbare lo stomaco dei lettori con cose poco odorose!).

Piuttosto, *pour la bonne bouche*:

(111) EL MADSCHRITI: A propos des *nombres amiables*, E. M. dit qu'il a constaté sur lui-même l'effet érotique de donner à quelconque le nombre 220 à manger, lui-même mangeant le nombre 284.

ETTORE BORTOLOTTI

J. A. SCHOUTEN, D. J. STRUIK: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, 2ª ediz., P. Noordhoff, Groningen, 1935: Band I, *Algebra und Uebertragungslehre* (J. A. SCHOUTEN) pagg. XII+202.

Di questa « Introduzione » di SCHOUTEN e STRUIK una prima edizione era stata pubblicata (in tre parti) fra il 1921 e il 1923 sul « Christiaan Huygens », dallo stesso Editore a Groningen. L'estratto, un volumetto di 77 pagine con la data del 1924, aveva avuto una certa diffusione: non molta però in Italia. La nuova edizione in due volumi — quello di cui ora diremo, recentemente uscito, è il primo; fra non molto dovrà seguire il secondo — è sia per l'assai maggiore estensione che per la forma e anche la sostanza del contenuto pressochè irriconoscibile; sotto ogni riguardo grandemente arricchita e migliorata.

Il campo d'idee in cui gli AA. vogliono guidare il lettore, dandogli il possesso degli strumenti di ricerca e una visione di quanto di più interessante vi si è costruito sinora, è quello delle cosidette « geometrie a connessione lineare »; fra le quali però in questa opera sono prese in considerazione soltanto quelle di tipo « vettoriale », tali cioè che per esse la legge di connessione si può esprimere come *una legge di trasporto dei vettori*. Si tratta, come è noto, di teorie geometriche cui ha dato origine la memoria del LEVI-CIVITA (1917) che introduce il « parallelismo » negli spazi curvi (riemanniani). E il mezzo di ricerca è, con le sue successive generalizzazioni e con molti interessanti perfezionamenti — precipuamente dovuti allo SCHOUTEN — che non ne mutano l'essenza, il calcolo differenziale assoluto di RICCI. Queste origini italiane sono dagli AA. riconosciute nel modo più aperto, basti dire che la nuova « Einführung » è simpaticamente dedicata al LEVI-CIVITA, mentre al RICCI erano dedicate due precedenti opere dei medesimi Autori, il trattato dello SCHOUTEN intitolato appunto: « *Der Ricci-Kalkül* » (Berlin, Springer, 1924) e un libro dello STRUIK, « *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung* » (Ibid., 1922); delle quali opere la presente pubblicazione congloba in parte il contenuto.

Nonostante le origini italiane le « geometrie a connessione », substrato geometrico di molte recenti teorie fisiche, si sono poi sviluppate specialmente all' estero. È desiderabile che anche qua in Italia si riprenda interesse a quest' ordine di ricerche; e ciò particolarmente ora che, consolidato ormai e liberato da molte sovrastrutture ingombranti il formalismo, lasciate quindi da parte le sterili considerazioni di metodo e di forma, ci si può infine accingere ad approfondire l' essenza geometrica dei nuovi enti. Perciò è da augurarsi che superando con un poco di buona volontà quel senso di ripugnanza iniziale che l' aspetto esteriore un po' macchinoso del formalismo può destare, si legga anche fra noi la « Einführung ». Si riconoscerà che almeno nella sua attuale struttura — dopo che lo SCHOUTEN, tempra robusta di ricercatore, in una quindicina d' anni di fervida operosità (1) ne ha fatto esperienza attraverso agli sviluppi di una ricca produzione — l' apparato formale per le nuove geometrie appare elaborato in modo così parco, razionale e avveduto da costituire, nelle mani di chi vi abbia preso un po' di famigliarità, un duttile e agevole strumento di ricerca.

Appunto la costruzione dell' « apparato di calcolo » (ma ampiamente commentato e integrato dall' illustrazione degli aspetti geometrici) è l' oggetto del presente volume, dovuto a J. A. SCHOUTEN; mentre il secondo, redatto da D. J. STRUIK, darà le applicazioni a teorie geometriche vere e proprie.

La prima edizione della « Einführung » presentava tutti gli sviluppi analitici *in una doppia formulazione*, secondo il *calcolo assoluto* di RICCI e secondo *l' analisi diretta* di SCHOUTEN. Ma qui, come già nel « Ricci-Kalkül », nè quel tipo di « analisi diretta » nè altri vengono utilizzati. E il perchè è chiaramente accennato sino dall' introduzione (pag. VII) e dichiarato più ampiamente a p. 33 (e sono idee già vivacemente esposte dallo SCHOUTEN du-

(1) Spesso in collaborazione con altri studiosi: oltre allo STRUIK, É. CARTAN, V. HLAVATY, ST. GOLAB, D. VAN DANTZIG, E. R. VAN KAMPEN, J. HAANTJES,....

rante il Congresso dello scorso anno, a Mosca): *il calcolo di Ricci già esso stesso costituisce « das denkbar schönste System direkter Rechnung »*. Questo perchè ogni formula del calcolo di Ricci è suscettibile *di una doppia interpretazione*: come relazione *fra tensori*, o *fra le loro componenti*; e la rappresentazione di un tensore al modo di Ricci, cioè mediante la sua componente generica, è a conti fatti non soltanto la rappresentazione più completa e più uniforme, ma fors'anche la più semplice! Si deve intendere — perchè quella doppia interpretazione sia possibile senza ambiguità — che un tensore venga rappresentato *sempre con una medesima lettera centrale* (Kern–Buchstabe), portante indici che variano, per ciascun sistema di riferimento, entro un corrispondente ben determinato campo di contrassegni (¹): questa è in sostanza la « Kern–Index–Methode », adottata nella presente opera come già da tempo nei lavori dello SCHOUTEN. Indubbiamente non è essenziale, per assegnare un tensore, ricorrere a quell'elemento estraneo che è il riferimento coordinato: è però necessario darne, in qualche modo, quello che lo SCHOUTEN ne dice « lo scheletro », cioè; la *lettera centrale* o lettera–nucleo, *l'ordinamento degli indici di co– e controvarianza*, le *posizioni degli indici rispetto a cui* (eventualmente) *si deve contrarre*. Ad es. invece di $v^{\nu} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ si potrebbe scrivere $v^{*} R_{*+\times}^{\cdot\cdot\cdot\circ}$: a questo modo non si dà nulla più del necessario. Ma *perchè non usare gli indici* $\alpha, \ldots, \omega$ *anzichè i segni* $*, +, \times, \circ, \ldots$? si ritorna allora al simbolismo di Ricci, che *senza alcuna ulteriore complicazione dà anche la rappresentazione scalare*: l'unica che verrà effettivamente usata nelle applicazioni a casi particolari concreti.

Quanto ora accennavo (seguendo SCHOUTEN: ved. p. 33–34) si riferisce in modo speciale alla sua « analisi diretta »; ma vi sono, come è noto, altri metodi diretti qua in Italia più noti e seguiti. Tali metodi, beninteso, servono egregiamente in tutto il vasto campo di studi in cui non v'è bisogno di introdurre *tensori d'ordine superiore a 2* (²), come lo stesso SCHOUTEN riconosce; l'utilità ed anche la semplicità ed eleganza del *calcolo vettoriale e omogra-*

(¹) Ad es. se $r, s, t \ldots, 1, 2 \ldots n$ sono i contrassegni *correnti* e quelli *fissi* per un sistema coordinato; $r', s', t' \ldots, 1', 2' \ldots n'$ i contrassegni analogamente stabiliti per un altro riferimento, A^{rs} ed $A^{r's'}$ saranno le componenti *generiche* e ad es. A^{11} ed $A^{2'3'}$ componenti *particolari*, relative ai due riferimenti coordinati, di uno stesso tensore, il quale potrà indifferentemente designarsi con A^{rs}, $A^{r's'}$.

(²) Le parole « tensore » e « ordine » sono sostituite, nella presente opera, da « affinore » e « valenza ».

fico, tanto vigorosamente promosso da una scuola italiana (BURALI-FORTI, MARCOLONGO, BOGGIO, BURGATTI,...) sono fuori discussione. Quando si vuol passare da 2 ad m qualunque, dalle *omografie* alle *iperomografie* — che dei tensori dànno una interpretazione espressiva, ma non completa, perchè un tensore d'ordine m dà luogo ad m differenti iperomografie — le cose si complicano singolarmente. L'uso di parecchi operatori fra iperomografie ed iperomografie risulta indispensabile, e questo dà al simbolismo un aspetto un po' pesante e anche dissimmetrico, sì che vien fatto di domandarsi se proprio tornava conto a liberarsi dagli indici! e al paragone gli sviluppi del calcolo di Ricci appaiono di una armonica e riposante chiarezza.

Ma veniamo infine a una rapida scorsa al volume. Questo si divide in due Capitoli, contenenti il primo la parte *algebrica* della teoria; il secondo quella *analitica,* o *teoria dei trasporti* (Uebertragungslehre). Il I Capitolo si inizia con la definizione (secondo VEBLEN) dell'« *oggetto geometrico* » (§ 1): ente rappresentato, in relazione a un qualunque riferimento coordinato in una varietà X_n, da un sistema di *numeri* — o, se esso è assegnato in tutta una regione della X_n, di *funzioni* delle coordinate curvilinee $\xi^\varkappa$ (le « componenti ») — che per una trasformazione di queste coordinate $\xi^\varkappa$ nelle $\xi^{\varkappa'}$ hanno una legge di trasformazione ben determinata, e soddisfacente a questa condizione: che le nuove « componenti » dell'ente si esprimano (in termini finiti) *mediante le antiche componenti,* (eventualmente) *le funzioni* $\xi^{\varkappa'}$ *delle* $\xi^\varkappa$, *e le loro derivate di ordine non superiore a un certo intero* N.

Questa definizione è assai generale: tanto che non è possibile senza convenienti restrizioni dare all'ente in considerazione un aspetto geometrico concreto. Naturalmente come caso particolare (pel quale è $N=1$, e la legge di trasformazione è lineare omogenea) fra gli « oggetti geometrici » sono compresi i *tensori* e gli *scalari,* le *densità tensoriali e scalari,* in una parola quelle che SCHOUTEN chiama « grandezze »: per le quali ad es. l'annullarsi di tutte le componenti ha significato invariante. Ma sono « oggetti geometrici » *anche le connessioni lineari* (le cui componenti o « parametri », per le connessioni di tipo *vettoriale,* hanno la stessa legge di trasformazione dei simboli di 2ª specie di Christoffel, che ne sono un caso particolare). È appunto da certe notevoli analogie nel comportamento delle « grandezze » e delle connessioni — ad es. nei riguardi della operazione che VEBLEN e T. Y. THOMAS hanno chiamato « estensione » (ved. p. 104) — che è sorta l'idea dell'*oggetto geometrico.* Però che sia proprio questo l'ente destinato a prendere nelle moderne teorie invariantive il ruolo già tenuto dal tensore o dall'invariante, non sembra si possa affermare: se in qualche modo non ne viene meglio delimitata la natura e precisata la definizione.

Nel § 2 l'A. introduce qualche nozione fondamentale sugli spazi affini (E_n), e sulle grandezze di E_n; anche le « grandezze hermitiane », di cui un esempio particolare è costituito dal sistema dei coefficienti di una *forma hermitiana*, bilineare in due serie di variabili immaginarie coniugate, e le « pseudograndezze », estensione abbastanza naturale e spesso utile delle « densità » tensoriali, sono prese in considerazione. Per le grandezze di E_n vengono esposte le nozioni fondamentali dell'*Algebra Tensoriale*; salvo la forma concisa e semplificata il modo di trattazione è ancora quello ampiamente sviluppato nel « Ricci–Kalkül », e meriterebbe di essere ponderato (ad es. nei riguardi dei *multivettori*, oggetto di alcune ricerche recenti, ma già da tempo nelle opere di SCHOUTEN studiati in modo ben più approfondito ed esauriente). Dopo alcune considerazioni sul « tensore unità » e sui « vettori fondamentali » (Massvektoren) per un riferimento cartesiano in E_n — che offrono all'A. l'opportunità di introdurre le nozioni molto interessanti di « *componenti intermediarie* » di un tensore e di « *Abdrosselung* » di un indice (operazione che muta un indice di co– o controvarianza in un indice *ordinale*), l'A. si sofferma abbastanza ampiamente (§ 3) sui *tensori di 2° ordine* (cioè: le *omografie vettoriali*); l'esposizione è aggiornata con risultati recenti di L. E. DICKSON e completata con la considerazione dei *tensori hermitiani del 2° ordine*.

Poi l'A. espone (§§ 4, 5) le nozioni fondamentali sugli *spazi euclidei* (R_n), intesi in un senso un pò generale (sì da includere gli *spazi di Minkowski*) e sugli spazi « *unitari* » (U_n), in cui una metrica è assegnata mediante una forma hermitiana.

Il secondo Capitolo ha inizio con la introduzione (§ 6) dei *sistemi locali di riferimento* (negli E_n locali, o « tangenti », nei singoli punti di X_n) per le grandezze di una varietà X_n qualunque. Accanto ai *riferimenti olonomi* subordinati ai *sistemi curvilinei* assegnati in X_n — quelli che il CARTAN dice i riferimenti (cartesiani) *naturali* associati al riferimento curvilineo — l'A. prende in considerazione anche i *riferimenti anolonomi*, pei quali invece tale subordinazione non è possibile. La condizione perchè un sistema di riferimento locale sia *olonomo è l'annullarsi delle componenti, relative a tale sistema, di un determinato oggetto geometrico, l'* « *Anholonomitätsobjekt* ». Ecco un esempio di oggetto geometrico che *non è un tensore nè una connessione*! D'ora in poi l'A. si vale, generalmente, di riferimenti anolonomi: con un segno speciale, $\stackrel{h}{=}$, contrassegna le eguaglianze che sono vere soltanto quando la rappresentazione delle grandezze (e degli *oggetti geometrici* in genere) sia relativa a un riferimento *olonomo*. Come naturale estensione l'A. passa a parlare del *problema di Pfaff* e sue generalizzazioni, limitandosi però a indicare i principali risultati.

Viene quindi (§ 7) a introdurre *le connessioni lineari*. La definizione è ricondotta a quella geometrica del *trasporto* (Uebertragung), e quindi a quella della *differenziazione covariante* (o assoluta): basata a sua volta su un gruppo di condizioni (che fra l'altro ne esprimono il carattere di *operazione lineare* e il comportamento simile a quello del differenziale ordinario nei riguardi delle somme e dei prodotti (esterni o interni) di tensori). Un semplice cenno è dedicato alla *derivazione covariante* (designata col simbolo ∇). Si introduce, indicandone l'interpretazione geometrica data dal CARTAN, il *tensore di torsione* $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$, esprimente *l'asimmetria* della connessione; si studiano in particolare (§ 8) le connessioni *metriche* e *semi-metriche*, cioè quelle che il CARTAN dice connessioni *euclidee* e *metriche*, rispettivamente.

Abbastanza ampia è l'esposizione (nel § 9) di quella che lo SCHOUTEN chiama « *D-Symbolik von* VAN DER WAERDEN-BORTOLOTTI », perchè introdotta, per lo studio delle varietà subordinate, pressochè contemporaneamente (e indipendentemente) dal VAN DER WAERDEN e da me nel 1927: sistematicamente usata poi in molte mie ricerche e adottata, con vedute un po' differenti, dallo SCHOUTEN fino dal 1929. Mi limiterò qui a dire che l'operatore D, a differenza di ∇ (sottraendosi dunque alla legge della « *Kern-Index-Methode* ») *opera su un tensore in modo che non è determinato pienamente dal tensore medesimo, ma è legato alla specie degli indici.* Il che appunto nello studio delle varietà subordinate riesce utilissimo, in quanto allora si ha a che fare con tensori che presentano spesso indici di due e anche di tre sorta differenti (*relativi all'ambiente, tangenziali, normali,* pel caso di una V_m in V_n) (¹).

Lo studio delle linee e varietà geodetiche (§ 10) dà occasione all'A. di svolgere parecchi interessanti argomenti che in qualche modo vi collegano: le *coordinate geodetiche e normali affini* in un punto, o geodetiche lungo una X_m (estensione di quelle di FERMI, relative al caso $m=1$; ma che per $m>1$ esistono *soltanto sotto particolari condizioni*); i tensori normali affini, le « estensioni » di un tensore, il teorema di riduzione secondo la scuola di Princeton.

(¹) « *Die D-Symbolik ist ein mächtiges Hilfsmittel bei der Behandlung von Einbettungsproblemen...* » (p. 97).

Si studiano poi (§ 11) le *proprietà di curvatura* delle connessioni, particolarmente pel caso delle V_n (cioè delle « connessioni riemanniane »); con svariate applicazioni e interpretazioni, fino a quella del CARTAN per le identità di BIANCHI.

Particolarmente interessante per la novità del contenuto è l'ultimo paragrafo (§ 12), dedicato alle *variazioni e deformazioni infinitesime.* Un campo vettoriale $v^\varkappa$ e una costante infinitesima dt definiscono, come si sa, una deformazione infinitesima $\xi'^\varkappa = \xi^\varkappa + v^\varkappa dt$ della varietà X_n: ora se in questa (entro una certa regione) è definito un *oggetto geometrico* Φ, in relazione alla determinazione di questo nel punto $\xi^\varkappa$ si possono considerare nel punto $\xi^\varkappa + v^\varkappa dt$ *quattro generalmente distinte determinazioni*: il valore *naturale* $\Phi + d\Phi$, esistente in conseguenza dell'assegnazione di Φ in una regione di X_n purchè insieme al punto $\xi^\varkappa$ questa contenga $\xi^\varkappa + v^\varkappa dt$; il valore *trasportato per pseudoparallelismo* (noi diremmo col LEVI-CIVITA: *per equipollenza*), $\Phi + \overset{*}{d}\Phi$; (dato però che per quel tipo di « oggetti geometrici » la equipollenza sia stata definita); il valore « mitgeschleppte » cioè quel valore $\Phi + \overset{m}{d}\Phi$ che, per effetto di una trasformazione di coordinate, la quale dia al punto variato $\xi^\varkappa + v^\varkappa dt$ le coordinate $\xi^\varkappa$, si riduce al valore Φ nel punto $\xi^\varkappa$; e infine il valore variato $\Phi + \overset{v}{d}\Phi$. I quattro operatori differenziali d, $\overset{*}{d}$, $\overset{m}{d}$ e $\overset{v}{d}$ *non sono invarianti, ma lo sono le loro differenze*: $\delta = d - \overset{*}{d}$ è il *differenziale assoluto*, $\underset{L}{\delta} = d - \overset{m}{d}$ viene detto, secondo D. VAN DANTZIG, « differenziale di Lie »; $\overset{n}{\delta} = \overset{v}{d} - d$, $\overset{g}{\delta} = \overset{v}{d} - \overset{*}{d}$, $\overset{a}{\delta} = \overset{v}{d} - \overset{m}{d}$ vengono dette la *variazione naturale*, la *variazione geodetica*, la *variazione assoluta*. Con questi operatori *ogni problema di deformazione si può trattare in maniera del tutto invariante;* come esempio viene determinata la variazione della connessione indotta di una V_m in V_n in conseguenza di una deformazione della V_m. *L'aspetto geometrico* degli operatori detti sopra non è completamente messo in luce; solo in parte è evidente a priori, ed è presumibile che anche pel resto non sia privo d'interesse. Naturalmente per precisarlo bisognerà anche restringere l'arbitrarietà dell'oggetto geometrico in questione.

Le ultime cinquanta pagine (cioè un quarto del volume) sono occupate (oltrechè dagli indici e da un elenco bibliografico) dalle risoluzioni dei molti problemi proposti al lettore nel corso dei due Capitoli. Si tratta in parte soltanto di semplici applicazioni; i più dei problemi sono di carattere complementare. Vi si trova una folla di risultati di carattere secondario, ma spesso interessanti e tali da completare assai utilmente quella delineazione un po' schematica della teoria che vien data nel testo. Per dare un esempio: il probl. 12.2 conduce a ritrovare le equazioni di Killing sotto questa forma: *l'annullarsi del « differenziale di Lie » del tensore metrico fondamentale.* ENEA BORTOLOTTI

V. HLAVATY: *Les courbes de la variété générale à* n *dimensions.* (Fasc. LXIII del « Mémorial des Sciences Mathématiques »), Paris, Gauthier-Villars 1934, pagg. 73.

I risultati che l'A. espone in questo volumetto riguardano un campo di ricerche — quello delle *proprietà delle linee di una varietà curva avente una connessione lineare* — in cui egli ha una competenza particolare; oggetto da oltre dieci anni di svariate sue ricerche personali. Sia per la brevità dello spazio che in considerazione del fatto che già esiste nella stessa collezione una Memoria di C. GUICHARD sulle curve negli spazi *piani* n-dimensionali, qui l'A. prende in particolare considerazione le questioni e i risultati in cui la teoria delle linee di uno spazio *curvo* si differenzia da quella analoga relativa al caso in cui l'ambiente è *piano*; si ha cioè intervento del *tensore di curvatura* (e di torsione). Si limita al caso in cui l'ambiente è *olonomo*, e la connessione lineare è *di tipo vettoriale* (escludendo quindi in particolare lo studio delle curve in ambiente *proiettivo* o *a connessione proiettiva*, pure oggetto di sue ricerche interessanti).

In un I° Capitolo svolge alcune nozioni preliminari sul calcolo tensoriale e le connessioni lineari. Viene poi (Cap. II) ad esporre la teoria delle *curve di una varietà a connessione euclidea*, giungendo alle formule di FRENET e alle loro conseguenze, affatto analoghe a quelle, ben note, che si hanno nel caso particolare in cui l'ambiente è *riemanniano*; accenna alla estensione della teoria delle curve consistente nel sostituire un campo qualunque di versori (dato lungo una linea) a quello formato dai versori tangenti; e ad una applicazione allo studio delle congruenze di linee. La teoria viene quindi estesa alle curve di uno *spazio di Weyl*, cioè (secondo CARTAN) dotato di una *connessione metrica senza torsione*; a questo scopo l'A. dà, per via analitica (p. 17), una normalizzazione del tensore metrico (che in uno spazio di WEYL non è dato che a meno d'un fattore) lungo la curva assegnata, il che gli permette appunto di ricondursi al caso già trattato (curve in S_n a connessione euclidea o in V_n riemanniana). Infine pel caso in cui l'ambiente è una varietà L_n *a connessione lineare generale* (affine con torsione), si basa sulla definizione di un « arco affine » invariante: ciò permette di associare alla curva (nelle ipotesi più generali) un sistema di $n-1$ scalari, le « curvature affini »; mediante le quali (e convenienti condizioni iniziali, da cui non si può astrarre in generale quando l'ambiente è curvo) si determina la linea. Resta soltanto il desiderio di vedere l'interpretazione geometrica degli eleganti artifizi analitici adottati!

Nel Cap. III l'A. studia *l'influenza della curvatura di una V_n sulle curve che vi sono situate:* valendosi di coordinate *localmente geodetiche di ordine 4 almeno* in un punto P, dà una rappresentazione canonica di una curva uscente da P in V_n in prossimità di P, ove a cominciare dai termini del 4° ordine si manifesta la presenza del tensore di curvatura (riemanniana) dell'ambiente. Studia poi le condizioni pel contatto d'ordine ≤ 5 fra due curve di V_n, e le relazioni fra le curvature di una stessa curva in relazione a due diverse metriche (con e senza curvatura) date all'ambiente; sempre mettendo in evidenza il ruolo che gioca il tensore di curvatura. Come applicazione delle sue rappresentazioni canoniche trova un interessante significato geometrico della curvatura riemanniana in un punto e secondo una giacitura piana.

Il Cap. IV è dedicato alle curve delle varietà subordinate, e particolarmente, alle linee *asintotiche d'ordine p* di una S_{n-1} in S_n (curve tali, che il loro spazio p-osculatore nel punto generico giaccia nello spazio ivi tangente alla S_{n-1}: dunque un tipo particolare di *quasi-asintotiche* $\gamma_{1,p}$, secondo il BOMPIANI) e alle linee quasi-asintotiche $\gamma_{1,n-1}$ di una V_2 in V_n; fra i risultati stabiliti vanno notate delle estensioni dei noti teoremi di BELTRAMI-ENNEPER, di BELTRAMI, di MEUSNIER.

Infine nel Cap. V. l'A. studia la *deformazione infinitesimale* di una curva in una varietà a connessione *euclidea* [secondo la terminologia dell'A.: *metrica*] *con torsione* (fra l'altro trovando una estensione del noto teorema, secondo cui una curva dello spazio ordinario e una sua deformata per spostamenti infinitesimi dei suoi punti sulle rispettive *binormali* si corrispondono *per eguaglianza d'arco*). Nel Cap. VI espone un suo elegante procedimento per integrare le equazioni del trasporto per parallelismo lungo una geodetica di lunghezza nulla (raggio di luce) dello spazio relativistico di WEYL; nel Cap. VII indica come possa costruirsi l'equazione intrinseca delle curve di una V_3 che appartengono a una assegnata V_2 di V_3, dandone l'effettiva costruzione per alcuni casi particolari. Il fascicolo termina con un indice bibliografico.

ENEA BORTOLOTTI

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; Band 59_{I}, 1933; Sonderheft I (Geschichte, Philosophie, Pädagogik, Mengenlehre); II (Arithmetik und Algebra); III (Analysis). Berlin, Walther de Gruyter, 1934.

Questi tre fascicoli del 1° volume relativo al 1933 (contenenti le pagg. 1–546) precedono non soltanto il volume che completerà la bibliografia matematica del 1930 (B. 56_{II}) e quello arretrato del 1926 (B. 52), ancora in preparazione: ma anche quelli del 1931 e 1932, pure in via di elaborazione. E allo stesso tempo la Redazione dello « Jahrbuch » sta approntando il materiale per il 1934 e 1935; cosicchè per ben sette annate a un tempo è in corso il lavoro (1)! L'intento di rimettere una buona volta al corrente il vecchio e autorevole « Jahrbuch », di non lasciarlo sommergere, in questo sconcertante straripare della letteratura matematica mondiale, è chiaro e merita tutta la nostra simpatia. Ma certamente l'impresa è ardua, e non induce all'ottimismo la constatazione che per ora non si riesce a procedere che a prezzo di lacune vistose, poi lentamente e faticosamente colmate. I nuovi fascicoli, assai ricchi e densi di contenuto, non sono inferiori alle belle tradizioni di serietà, di organicità e completezza dello « Jahrbuch »; ma indubbiamente a questo nuoce il confronto, dal punto di vista della rapidità e puntualità nel far conoscere i progressi raggiunti dalle svariate teorie matematiche, col giovane « Zentralblatt ». Peccato che le energie occorrenti pel grandioso lavoro di sintesi, di raffronto, di coordinazione, di selezione, altrettanto ingrato per chi vi collabora quanto è utile agli studiosi, che ne ricavano un orientamento e un collegamento per muoversi nei loro campi di ricerca, peccato che quelle energie siano ora disperse fra le due Riviste!

ENEA BORTOLOTTI

(1) (*Nota aggiunta durante la correzione delle bozze*). — Il prof. G. FEIGL, che lascia ora, dopo parecchi anni di fervida attività, la redazione dello « Jahrbuch » perchè chiamato all'Università di Breslavia, gentilmente mi avverte che il B. 59_{I} (1933) è già completo (sono uscite anche le H. IV e V); così pure è stato recentemente completato il B. 55_{II} (1929). Sono già pubblicati in parte e verranno completati entro l'anno il B. 52 (1926), il B. 56_{II} (1930), il B. 60_{I} (1934). Pure entro l'anno dovranno uscire la H. 1 del B. 57_{I} (1931) e la H. 1 del B. 61_{I} (1935); in uno stadio più arretrato di elaborazione sono il B. 57_{II} (1931), i B. 58_{I} e 58_{II} (1932), il B. 59_{II} (1933), il B. 60_{II} (1934). D'ora in poi la Redazione dello « Jahrbuch » si propone di pubblicare il primo dei due volumi relativi a un anno, n, in parte nell'anno medesimo, in parte nell'anno $n+1$; e completare il secondo volume nel corso dell'anno $n+2$.

RICHARD C. TOLMAN: *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* At the Clarendon Press, 1934. Royal 8vo, pp. 502.

Gli argomenti trattati dal TOLMAN nel volume in discorso investono l'intero campo della teoria speciale e di quella generale della relatività, con limitazione allo sviluppo di tali teorie ch'ebbe giustificazioni concrete nel cimento sperimentale.

L'accorto indagatore fisico si premunisce appunto contro divagazioni teoriche per lui prive di rilievo, praticando, per dirla col LODGE, una vera politica di esclusione. Giustamente, pertanto, codesto volume non contiene, ad esempio, trattamento alcuno di numerose ricerche riguardanti un nesso fra gravitazione e campo elettromagnetico. Lo stesso Autore, nelle pagine introduttive, dice: « Up to the present, these attempts appear either to be equivalent to the usual relativistic extension of electromagnetic theory as given in the present text, or to be — although mathematically interesting — of undemonstrated physical importance. Furthermore, it is hard to escape the feeling that a succesful unified field theory would involve microscopic considerations, which are not the primary concern of this book ». Giova rilevare anche la conforme opinione dell' EINSTEIN, il quale, in uno sguardo al libro del TOLMAN, nel giornale americano *Science* del 19 ottobre 1934 (p. 358), scrive: « ... hat sich der Verfasser mit scharfem, kritischen Sinn auf eine phänomenologische Darstellung beschränkt und die zahlreichen Versuche unberücksichtigt gelassen, den Zusammenhang zwischen Gravitation und elektromagnetischen Felde sowie die Struktur der Materie durch die Methoden der Relativitästheorie aufzuhellen. Dies erscheint durchhaus berechtigt, da keiner dieser voneinander grundsätzlich verschiedenen Versuche bisher zu irgendwie überzeugenden Ergebnissen geführt hat ». Queste parole dell' EINSTEIN formano un naturale suggello di alcune sue considerazioni, facenti parte della Herbert Spencer Lecture: « On the method of theoretical physics », da lui tenuta ad Oxford il 10 giugno 1933.

Però l'opera del TOLMAN, lungi dall'essere una comune trattazione della teoria speciale e di quella generale della relatività (come del resto fa subito prevedere il titolo dell'opera medesima), contiene, oltre ad un assestamento della cinematica, della dinamica e della elettrodinamica relativistiche, la importante istituzione relativistica della termodinamica e le applicazioni al problema cosmologico. A proposito del quale giova incidentalmente notare un' osservazione dell' EINSTEIN in merito alla costante cosmologica: « Die Einführung einer solchen Kostante ist aber vom theoretisch formalen Standpunkt eine reine Willkür. Seitdem empirisch die Expansions-Bewegung der Stern-Systeme bekannt geworden ist, besteht vorläufig für die Einführung jenes Gliedes weder ein logischer noch ein physicalischer Anlass. Es scheint deshalb natürlich, bei der Behandlung des kosmologischen Problems von der Einführung des Λ-Gliedes abzusehen, solange sich für dessen Einführung keine zwingenden Gründe in der Erfahrung gefunden haben ».

Il richiamo delle teorie sull'espansione dell'universo contenute nel libro del TOLMAN invita pure a citare i lavori del MILNE e del McCREA sull'universo *newtoniano* in espansione, comparsi nel « Quarterly Journal of Mathematics » (Oxford Series; March 1934) e nel volume del MILNE (corrente anno) « Relativity, Gravitation and World-Structure »; volume che contiene anche le geniali ricerche dello stesso MILNE, basate sopra una sua fondamentalissima concezione, per la quale giova riportare alcune sue frasi: « It is not space-time which is fundamental. There is no absolute thing existing in itself which might be called « the space-time of the world ». Time-experiences alone are treated as fundamental ». Codeste ricerche del MILNE apportano nuova importante luce sul problema cosmologico. In merito al quale giova pur dire che, se da una parte osservazioni posteriori alla scoperta astronomica di HUBBLE ed HUMASON fanno a taluno pensare ad un qualche affievolimento d'entusiasmo nei riguardi delle suggestive teorie cosmologiche di cui sopra, dall'altra il posto di tali teorie nella scienza non fanno certo a noi pensare, almeno per ora, ad un tramonto di esse. Il TOLMAN chiude il suo volume con le seguenti parole: « It is appropriate to approach the problems of cosmology with feelings of respect for their importance, of awe for their vastness, and of exultation for the temerity of the human mind in attempting to solve them. They must be treated, however, by the detailed, critical, and dispassionate methods of the scientist ».

Terminiamo il nostro breve discorso, rilevando il successo della bella opera del TOLMAN, anche per quanto concerne l'elegante chiarezza degli svolgimenti offerti da codesto eminente scienziato del « California Institute of Technology ». U. CRUDELI