UMI

Corrispondenza

* Risposta di Beniamino Segre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.4, p. 266–269.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_4_266_0>

CORRISPONDENZA

DOMANDE

3. Cosa si sa circa alla soluzione generale in numeri interi delle equazioni

$$\begin{cases} a+b+c+d=e+f+g+h \\ a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+g^2+h^2 \\ a^4+b^4+c^4+d^4=e^4+f^4+g^4+h^4. \end{cases}$$

Esempio: $a=b$, $b=5$, $c=13$, $d=14$; $e=2$, $f=7$, $g=11$, $h=15$.

Analoga domanda circa al sistema

$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4=u^2+v^2+(u+v)^2 \\ x^8+y^8+z^8=u^4+v^4+(u+v)^4. \end{cases}$$

Esempio: $x=3$, $y=4$, $z=5$, $u=5$, $v=19$.

Dott. A. MOESSNER, Norimberga.

RISPOSTE

2. Determinanti trigonometrici assai generali, sono stati da tempo considerati ed in parte studiati da G. LORIA [1]; i bei risultati di tale A., però, non forniscono senz'altro uno sviluppo del tipo richiesto nella domanda 2. A quest'ultima si può rispondere con l'identità:

$$\Delta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2m}) = \left| \begin{matrix} 1, \cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i, \cos^2\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i\cos\theta_i, \ldots, \\ \cos^{m-1}\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i\cos^{m-2}\theta_i, \cos^m\theta_i \end{matrix} \right|_{i=2m}^{i=1} = \tag{1}$$

$$= (-1)^m 2^{m^2} \cdot \prod_{\substack{i,l=1 \\ l>i}}^{2m} \operatorname{sen}\frac{\theta_l-\theta_i}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{2m}}{2},$$

che per $m=2$ sostanzialmente si riduce alla relazione ivi segnalata e di cui indico più sotto un'elegante applicazione geometrica.

[1] Cfr. G. LORIA, *Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia,* « Periodico di Mat. », t. 13 (1898), p. 129.

Per stabilire la (1) si osservi che, in forza delle

$$\cos^r \theta_i = \frac{1}{2^{r-1}}\left[\cos r\theta_i + \binom{r}{1}\cos(r-2)\theta_i + \binom{r}{2}\cos(r-4)\theta_i + \dots\right],$$

$$\operatorname{sen}\theta_i \cos^{r-1}\theta_i = \frac{1}{2^{r-1}}\left[\operatorname{sen} r\theta_i + \binom{r-1}{0}\frac{r-2}{1}\operatorname{sen}(r-2)\theta_i + \right.$$

$$\left. + \binom{r-1}{1}\frac{r-4}{2}\operatorname{sen}(r-4)\theta_i + \dots\right],$$

risulta:

$$\Delta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2m}) = \frac{1}{2^{(m-1)^2}}\left| 1, \cos\theta_i, \operatorname{sen}\theta_i, \cos 2\theta_i, \operatorname{sen} 2\theta_i, \dots, \right.$$

$$\left. \cos(m-1)\theta_i, \operatorname{sen}(m-1)\theta_i, \cos m\theta_i \right|_{i=2m}^{i=1};$$

sostituendo all'ultimo determinante l'espressione datane da K. WEIHRAUCH [1], si ottiene appunto la (1).

***

Le curve piane algebriche d'ordine $2n$ aventi due punti n-pli nei punti ciclici, formano un sistema lineare, $|C^{2n}|$, di dimensione

$$d_{2n} = n(n+2);$$

quelle fra esse che contengono come parte un'ellisse (reale) Γ assegnata, che non sia una circonferenza, si spezzano ulteriormente nella retta all'infinito contata due volte ed in una curva d'ordine $2(n-2)$ soggetta alle sole condizioni di passare $n-2$ volte per ciascuno dei punti ciclici. La serie lineare segata su Γ da $|C^{2n}|$ ha perciò la dimensione

$$d_{2n} - (d_{2(n-2)} + 1) = 4n - 1;$$

ebbene, i gruppi di tale g_{4n}^{4n-1} sono caratterizzati dalla seguente proprietà (già nota per $n=1$, ossia nel caso delle quaterne concicliche di punti di un'ellisse):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $4n$ *punti di un'ellisse, di eccentricità* e *non nulla, possano venir segati su essa da una curva d'ordine* $2n$ *avente due punti* n*-pli nei punti ciclici, è che la somma delle relative anomalie eccentriche sia* $\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Sia infatti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \left(\text{con } e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \neq 0\right) \tag{2}$$

(1) Ved. K. WEIHRAUCH, *Ueber gewisse Determinanten*, « Zeitschrift für Math. und Phys. », t. 33 (1888), p. 126.

l'equazione cartesiana dell'ellisse Γ; quest'ultima può anche venir rappresentata parametricamente, facendo figurare un parametro t razionalizzante o l'anomalia eccentrica θ, mediante le:

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2} = a\cos\theta, \quad y = b\frac{2t}{1+t^2} = b\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \left(t = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

Un sistema lineare ∞^{4n-1} di C^{2n} nessuna delle quali contiene Γ, e che quindi determina su Γ proprio la suddetta g_{4n}^{4n-1}, è dato dall'equazione

$$\text{(3)} \qquad \lambda_0(x^2+y^2)^n + \sum_{r=1}^{n-1} x^{r-1}(\lambda_r'x + \lambda_r''y)(x^2+y^2)^{n-r} + \\ + \sum_{s=1}^{n}(\mu_s'x + \mu_s''y)x^{n-s} + \mu_0 = 0,$$

al variare dei $4n$ parametri λ, μ: per vederlo, basta sostituire nella (3) ad x^2+y^2 l'espressione $e^2x^2+b^2$, fornita dalla (2). Risulta subito che, affinchè la (3) possa sussistere per valori non tutti nulli dei parametri λ, μ, quando in essa si ponga

$$x = a\cos\theta_i, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta_i \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, 4n,$$

occorre e basta che sia

$$\text{(4)} \qquad \Delta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{4n}) = 0;$$

e ciò, in base alla (1), dimostra la proposizione enunciata.

Tale proposizione può anche ottenersi senza difficoltà per via trascendente, applicando sopra Γ il teorema di ABEL alla g_{4n}^{4n-1} considerata ed all'integrale abeliano di 3ª specie $\theta = \int_0^t \frac{2dt}{1+t^2}$ [1]. In virtù del significato geometrico della (4), dianzi assodato, si ottiene così in pari tempo un nuovo metodo per stabilire la (1) nell'ipotesi di m pari ($= 2n$).

Dal precedente teorema si deduce tosto che:

Se 12 punti di un'ellisse Γ si possono dividere in 4 terne, tali che i 4 punti di Γ conciclici con queste terne siano conciclici fra loro, la stessa proprietà continua a sussistere comunque i 12 punti vengano distribuiti in 4 terne. Affinchè 12 punti di Γ godano della suddetta proprietà, è necessario e sufficiente ch'essi risultino le intersezioni di Γ con una curva del 6º ordine avente due punti tripli nei punti ciclici.

(1) Non v'è che da generalizzare quanto, relativamente al caso $n = 1$, trovasi in P. APPELL-É. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, Gauthier-Villars, 1895), pp. 518-519.

Lascio al Lettore le facili e molteplici estensioni di questo corollario, ed osservo da ultimo che:

Se 4n *punti di un' ellisse sono segati su essa da una curva d' ordine* 2n *avente due punti* n-*pli nei punti ciclici, lo stesso può dirsi dei* 4n *punti che si ottengono dai dati sostituendone alcuni — in numero pari* $\leq 4n$ — *coi punti dell' ellisse a loro diametralmente opposti.*

BENIAMINO SEGRE

2. Alla stessa domanda viene data dal prof. A. BARZAGHI una risposta che verrà pubblicata in forma di Piccola Nota in un prossimo fascicolo.