
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GAETANO SCORZA

Generalizzazione delle varietà di Segre

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 14 (1935), n.5, p. 273–276.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_273_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_273_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1935.

PICCOLE NOTE

Generalizzazione delle varietà di Segre.

Nota di GAETANO SCORZA (a Roma).

Sunto. - *Si introducono delle varietà che comprendono, come caso particolare, le ben note varietà di SEGRE.*

Siano dati p spazi lineari $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$ delle dimensioni $r_1, r_2, \dots, r_p$, e siano

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{r_i+1}^{(i)}$$

le coordinate correnti di punto in S_{r_i} .

Allora, se Σ è uno spazio lineare della dimensione

$$(r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_p + 1) - 1$$

e in esso le coordinate correnti di punto sono le

$$X_{j_1, j_2, \dots, j_p} \quad \left(\begin{matrix} j_1 = 1, \dots, r_1 + 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ j_p = 1, \dots, r_p + 1 \end{matrix} \right),$$

una varietà sulla quale si possa rappresentare biunivocamente, e senza eccezioni, l'insieme delle p -ple di punti estratte da $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$, cioè delle p -ple del tipo $(A_1, \dots, A_p)$, con A_i punto di S_{r_i} , si ottiene, come notoriamente fu indicato da C. SEGRE ⁽¹⁾, considerando in Σ la varietà rappresentata dalle equazioni parametriche

$$X_{j_1, j_2, \dots, j_p} = x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \dots x_{j_p}^{(p)};$$

varietà che riesce della dimensione

$$r_1 + r_2 + \dots + r_p$$

⁽¹⁾ C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (« Rend. del Circ. mat. di Palermo », t. V, 1891): veggasi pure la mia Nota: *Sulle varietà di SEGRE* (« Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino », vol. XLX, 1909).

e dell'ordine

$$\frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_p)!}{r_1! r_2! \dots r_p!}.$$

Ebbene, con procedimento perfettamente simile può ottenersi una varietà atta a rappresentare biunivocamente, senza eccezioni, l'insieme delle p -ple di S_k estratte da $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$, cioè delle p -ple del tipo $(z_1, z_2, \dots, z_p)$, z_i essendo un S_k di S_{r_i} , o, più generalmente delle p -ple del tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, con λ_i spazio di S_{r_i} della dimensione k_i , gli interi $k_1, k_2, \dots, k_p$ essendo p interi fissi assegnati.

Oggetto di questa breve Nota è appunto la determinazione degli ordini delle varietà, cui per tal modo si perviene.

1. Per chiarezza di discorso e comodità di notazioni trattiamo il caso $p=2$: dopo di che, come il lettore potrà riconoscere, sarà lecito scriver senz'altro la formula che risolve il caso generale.

Abbiansi pertanto due spazi S_{r_1} ed S_{r_2} delle dimensioni r_1, r_2 , e, detti k_1 e k_2 due interi fissi assegnati, con $0 \leq k_i < r_i$ ($i=1, 2$), consideriamo le coppie di spazi del tipo (λ_1, λ_2) , λ_1 essendo un S_{k_1} di S_{r_1} e λ_2 un S_{k_2} di S_{r_2} .

Posto

$$\binom{r_1 + 1}{k_1 + 1} = t_1 \quad \text{ed} \quad \binom{r_2 + 1}{k_2 + 1} = t_2,$$

indichiamo con

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{t_1}^{(1)} \quad \text{ed} \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{t_2}^{(2)}$$

le coordinate grassmanniane di λ_1 e λ_2 , rispettivamente: e, detto Σ uno spazio della dimensione

$$t_1 t_2 - 1,$$

con le coordinate correnti

$$X_{j_1, j_2} \quad \left(\begin{matrix} j_1 = 1, \dots, t_1 \\ j_2 = 1, \dots, t_2 \end{matrix} \right),$$

diciamo V la varietà di Σ rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$(1) \quad X_{j_1, j_2} = x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)}$$

al variare di λ_1 e λ_2 .

Notisi subito che (se $k_1 > 0$) nelle (1) i parametri $x^{(1)}$ — e lo stesso dicasi per i parametri $x^{(2)}$ — non sono indipendenti, bensì legati, com'è ben noto, da un certo numero di equazioni quadratiche: e che, mediante la (1) l'insieme delle coppie (λ_1, λ_2) estratte da S_{r_1} ed S_{r_2} si riflette biunivocamente e senza eccezioni sull'insieme dei punti di V .

La dimensione della totalità degli S_{k_i} di S_{r_i} è

$$h_i = (k_i + 1)(r_i - k_i),$$

quindi la dimensione di V è data da

$$(2) \quad h = h_1 + h_2;$$

e per determinarne l'ordine bisognerà trovare quanti sono i punti comuni a V e ad h iperpiani di Σ .

Indichiamo con H_i (se v'è luogo a parlarne) il sistema di equazioni quadratiche intercedenti fra le coordinate $x^{(i)}$ di λ_i e siano

$$\sum_{j_1}^{1 \dots t_1} \sum_{j_2}^{1 \dots t_2} A_{j_1, j_2}^{(l)} X_{j_1, j_2} = 0 \quad (l=1, \dots, h)$$

le equazioni di h iperpiani di Σ ; allora l'ordine richiesto sarà il numero delle soluzioni, con le $x^{(1)}$ — al pari delle $x^{(2)}$ — non tutte nulle, del sistema costituito dalle equazioni

$$(3) \quad \sum_{j_1}^{1 \dots t_1} \sum_{j_2}^{1 \dots t_2} A_{j_1, j_2}^{(l)} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} = 0 \quad (l=1, \dots, h)$$

insieme con i sistemi H_1 ed H_2 .

Per calcolare codesto numero ricorriamo ad una ben nota applicazione del principio della conservazione del numero, cioè sostituiamo alle equazioni bilineari (3) altre h equazioni del tipo

$$(4) \quad \varphi_l^{(1)} \varphi_l^{(2)} = 0 \quad (l=1, \dots, h),$$

con le $\varphi_l^{(i)}$ forme lineari nelle $x^{(i)}$.

Perché una qualsiasi delle equazioni (4) sia soddisfatta, bisogna che o le $x^{(1)}$ annullino il fattore $\varphi^{(1)}$ che vi comparisce, o le $x^{(2)}$ annullino il relativo fattore $\varphi^{(2)}$; d'altronde alle $x^{(i)}$, legate già dalle equazioni H_i non possono imporsi al più che $(k_i + 1)(r_i - k_i) = h_i$ condizioni semplici ulteriori, dunque, attesa la (2), per trovare il numero delle soluzioni richieste del sistema formato dalle (4) con le H_1 ed H_2 bisognerà trovare quanti sono i gruppi di valori (non tutti nulli) delle $x^{(1)}$, legati dalle H_1 , e delle $x^{(2)}$, legati dalle H_2 , tali che quelli annullino h_1 fattori $\varphi^{(1)}$ e questi annullino gli h_2 fattori $\varphi^{(2)}$ con gl'indici tutti diversi dagl'indici dei detti fattori $\varphi^{(1)}$.

Il numero dei gruppi di valori (non tutti nulli) delle $x^{(i)}$, legati dalle H_i , che annullano h_i fattori $\varphi^{(i)}$, non essendo altra cosa che l'ordine della *grassmanniana* rappresentante la totalità degli S_{k_i} di S_{r_i} , è dato da ⁽¹⁾

$$\frac{1! 2! \dots k_i! h_i!}{(r_i - k_i)! (r_i - k_i + 1)! \dots r_i!};$$

⁽¹⁾ Cfr. F. SEVERI, *Sulle varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, (« Ann. di Matem. ed pura applicata », 3^a serie, t. XXIV).

la scelta di h_1 fattori $\varphi^{(1)}$ nell'insieme delle h $\varphi^{(1)}$ può farsi in

$$\binom{h}{h_1} = \frac{(h_1 + h_2)!}{h_1! h_2!}$$

modi diversi, dunque:

L'ordine di V è dato da

$$(5) \quad \frac{1!2! \dots k_1! 1!2! \dots k_2! (h_1 + h_2)!}{(r_1 - k_1)! (r_1 - k_1 + 1)! \dots r_1! (r_2 - k_2)! (r_2 - k_2 + 1) \dots r_2!}.$$

Di qua si ricava, ad es., che:

Dati un S_1 ed un S_3 , la totalità delle coppie che si ottengono associando ciascun punto dell' S_1 con ciascuna retta dell' S_3 può esser rappresentata biunivocamente sopra una V_5^{10} di un S_{11} ;

e che:

Dati due S_3 , la totalità delle coppie che si ottengono associando ciascuna retta dell'uno con ciascuna retta dell'altro può esser rappresentata biunivocamente sopra una V_8^{280} di un S_{35} .

Notisi — e l'osservazione è senz'altro generalizzabile — che quella V_5^{10} contiene una schiera ∞^4 di S_1 e una schiera ∞^1 di V_4^2 , mentre questa V_8^{280} contiene due schiere ∞^4 di V_4^2 e che, in entrambi i casi, due enti hanno nessun punto, o un sol punto, comune, secondo che sono elementi di una medesima schiera o di schiere diverse.

2. Quanto è stato detto fin qua mostra come possa definirsi col procedimento di SEGRE una varietà atta a rappresentare biunivocamente, e senza eccezioni, la totalità delle p -ple del tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ con λ_i spazio di S_{r_i} della dimensione k_i ; e che tale varietà, posto

$$h_i = (k_i + 1)(r_i - k_i) \quad (i = 1, \dots, p),$$

risulta della dimensione

$$h = h_1 + \dots + h_p,$$

dell'ordine

$$\frac{h! \prod_i^{1 \dots p} (1!2! \dots k_i!)}{\prod_i^{1 \dots p} (r_i - k_i)(r_i - k_i + 1) \dots r_i!},$$

e immersa in uno spazio della dimensione

$$\prod_i^{1 \dots p} \binom{r_i + 1}{k_i + 1} - 1.$$