Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Tricomi

Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali in ispecie sferici. II

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.5, p. 277–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_277_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici.

Nota di FRANCESCO TRICOMI (a Torino) (*).

4. La particolarità più notevole della trasformazione funzionale (13) risiede nel fatto che il suo nucleo è una funzione della sola differenza $s-t$, e non di s e t separatamente. Invero ciò implica [10] che essa sia sostanzialmente *commutabile con la derivazione*; propriamente si constata senza difficoltà che sussiste la formula

$$\frac{d}{ds}\,\mathbf{T}^{(\alpha)}[F(t)] = \mathbf{T}^{(\alpha)}\left[\frac{d}{dt}F(t)\right] + \frac{F(-1)}{(s+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}}, \tag{14}$$

per le cui conseguenze rinvio senz'altro alla mia Nota cit. [3].

Un'altra notevole proprietà della trasformazione in esame è la facilità con cui *essa può essere invertita senza uscire dal campo reale.*

Propriamente dalla (13), supposto che sia $-1/2 < \alpha < 1/2$, per la già citata formula di ABEL si ricava che

$$F(s) = \frac{\cos\alpha\pi}{\pi}\,\frac{d}{ds}\int_{-1}^{s}\frac{f(t)dt}{(s-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}},$$

donde, tenendo conto della (14), segue

$$F(s) = \frac{\cos\alpha\pi}{\pi}\left\{\mathbf{T}^{(-\alpha)}[f'(t)] + \frac{f(-1)}{(s+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right\}. \tag{15}$$

Più generalmente; con un calcolo perfettamente analogo a questo che conduce alla formula di ABEL, si trova la seguente *formula di composizione*:

$$\mathbf{T}^{(\beta)}\cdot\mathbf{T}^{(\alpha)} = \mathbf{T}^{(\alpha)}\cdot\mathbf{T}^{(\beta)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\,\mathbf{T}^{\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)}, \tag{16}$$

(*) Continuazione e fine, v. numero precedente.

(10) Cfr. la mia Nota cit. (3) badando alla circostanza che, a differenza di quello che là succede, quì il campo d'integrazione *non è* un'intera retta del piano t.

che mostra come le trasformazioni

$$(17)\qquad I^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)} \mathbf{I}^{(\alpha)}$$

formino gruppo. Questo gruppo è un sottogruppo di quello detto da VOLTERRA [11] « *del ciclo chiuso* ».

5. Le precedenti considerazioni possono, fra l'altro, applicarsi al problema di determinare in termini finiti la somma di una data serie di funzioni sferiche, analogamente a quanto, nel caso dei polinomi di LAGUERRE e di HERMITE, ho mostrato nei miei lavori citati in principio. Propriamente, limitandoci per semplicità al caso in cui sia data una serie di polinomi sferici *di Legendre*:

$$(18)\qquad \varphi(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots$$

in virtù delle conclusioni cui siamo giunti nel § 3, possiamo asserire che se si riesce a sommare la serie

$$(19)\qquad \Phi(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arc}\cos x\right],$$

allora è:

$$(20)\qquad \varphi(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\Phi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = \mathbf{I}[\Phi].$$

supposto beninteso che la serie (19) sia integrabile termine a termine nell'intervallo $(-1, x)$ che interessa considerare.

Anche la serie (19) è, al pari della (18), una *serie di polinomi* (a prescindere da fattori *fissi* contenenti radicali) chè, com'è ben noto, $\cos n \operatorname{arc}\cos x$ è un polinomio di grado n in x e $\sin n \operatorname{arc}\cos x$ è il prodotto di $\sin \operatorname{arc}\cos x$, cioè di $\sqrt{1-x^2}$ per un polinomio di grado $n-1$ in x. Comunque è utile porre nella (19) $x = \cos\theta$, con che essa diviene

$$(19')\qquad \Phi(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$$

od anche

$$(19'')\qquad \Phi(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sin\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta\right),$$

[11] Op. cit. [5], p. 150 e seg.

e si vede così che, col metodo indicato, la sommazione di una serie di polinomi sferici viene, in sostanza, ridotta a quella di certe serie trigonometriche, il che costituisce certo un problema, diciamo così, più familiare.

Il procedimento può, del resto, anche invertirsi, e cioè ci si può servire della trasformazione $\mathfrak{T}$ per dedurre da un noto sviluppo in serie di polinomi sferici un (eventualmente nuovo) sviluppo in serie trigonometrica. A tal uopo conviene osservare che dalla (20), per la solita formula di ABEL, si trae

$$\int \Phi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}},$$

mentre che dalla (19′), moltiplicando per $\sin\theta$ e integrando, segue

$$\int \Phi(\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1/2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta;$$

avremo dunque la formula

$$\mathfrak{T}[\varphi] = \int_{-1}^{x}\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1/2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + C, \tag{21}$$

dove C denota una costante da determinarsi, ch'è certo nulla se la serie del secondo membro è uniformemente convergente, e perciò continua, nell'intorno di $x = -1$.

6. Per mostrare qualche concreta applicazione delle formule precedenti, prendiamo p. es. come punto di partenza il ben noto sviluppo in serie di FOURIER:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad (0 < x < \pi),$$

che, ponendo $x = \theta/2$, diviene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad (0 < \theta < 2\pi),$$

e può pertanto identificarsi con la serie (19′) col porre

$$a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad \Phi(\cos\theta) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sin\theta},$$

formule di cui la seconda può scriversi

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-x^2}}, \qquad (-1 < x < 1).$$

Ne segue, essendo altresì soddisfatta la condizione d'integrabilità termine a termine precedentemente indicata, che sussiste la formula

$$(22) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^{x} \frac{dy}{\sqrt{(x-y)(1-y^2)}}, \qquad (-1 < x < 1).$$

L'integrale ellittico che figura nella (22) si riduce a forma canonica con la sostituzione

$$y = -1 + (1+x)\sin^2\psi$$

che, con facili calcoli, conduce alla formula

$$(23) \qquad \int_{-1}^{x} \frac{dy}{\sqrt{(x-y)(1-y^2)}} = \sqrt{2}\, K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right),$$

avendo indicato con $K(k)$ l'integrale completo di prima specie di LEGENDRE, cioè avendo posto

$$K(k) = \int_{0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Se ne conclude che regge l'uguaglianza

$$(24) \qquad K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{2n+1}, \qquad (-1 < x < 1),$$

che, ponendo l'argomento di K uguale a $\sin\alpha$, il che implica $x = -\cos 2\alpha$, prende la forma

$$(24') \qquad \boxed{K(\sin\alpha) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1}, \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).}$$

Questi sviluppi non sembrano esser stati finora osservati.

Finalmente diamo un esempio di applicazione della formula (21). Partiamo a tal uopo dal noto ([12]) sviluppo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)\left[\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 P_{2n}(x), \quad (-1 < x < 1),$$

([12]) V. p. es. HOBSON, op. cit. ([6]), p. 49. Questa serie è uno dei pochissimi sviluppi in serie di polinomi sferici il cui valore trovasi esplicitamente indicato nei classici trattati di HEINE e di HOBSON.

che, identificato con la serie (18), fornisce

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (-1 < x < 1); \quad c_{2n} = \frac{\pi}{2}(4n+1)\left[\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2,$$
$$c_{2n+1} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

epperò, tenendo conto della (23), si avrà in questo caso:

$$\int_{-1}^{x} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{2}\, K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right), \qquad (-1 < x < 1);$$

in virtù della (21) possiamo dunque asserire che è

$$K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 \cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right] + C,$$
$$(-1 < x < 1),$$

donde, avvalendosi ulteriormente della sostituzione $\sqrt{(1+x)/2} = \sin\alpha$, segue

$$(25) \quad K(\sin\alpha) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 \sin(4n+1)\alpha + C, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Per determinare la costante C non si può porre senz'altro $\alpha = 0$ nella precedente formula (il che condurrebbe al valore $C = K(0) = \pi/2$ che, come vedremo, è *falso*), perchè la serie a secondo membro *non* converge uniformemente nell'intorno di $\alpha = 0$. Conviene invece osservare che il coefficiente di $\sin(4n+1)\alpha$ per $n \to \infty$ è asintoticamente uguale a $1/\pi n$; più esattamente dalla formula di Stirling, è facile dedurre che, posto

$$\left[\frac{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 = \frac{1}{\pi n} + \varepsilon_n,$$

per $n \to \infty$ è $\varepsilon_n = 0(n^{-2})$, il che implica che la serie

$$S(\alpha) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin(4n+1)\alpha,$$

è uniformemente convergente, epperò continua, anche per $\alpha \to 0$. Ma d'altra parte si trova assai facilmente che

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4n+1)\alpha}{\pi n} = \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\cos\alpha - \log(2\sin 2\alpha)\sin\alpha,$$
$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right);$$

dunque la (25) può scriversi sotto la forma

$$K(\sin\alpha) = [\pi - \log(2\sin 2\alpha)]\sin\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\cos\alpha + S(\alpha) + C, \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \tag{26}$$

donde, passando al limite per $\alpha \to 0$, segue immediatamente $C = 0$. Se ne conclude che vale la formula

$$\boxed{K(\sin\alpha) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 2 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 \sin(4n+1)\alpha, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),} \tag{27}$$

che sembra non esser stata neanch'essa finora mai osservata.

La (27) scritta sotto la forma (26) (con $C = 0$) si presta bene al controllo numerico, che abbiamo eseguito con ottimi risultati.