Angelo Barzaghi

Su alcune identità trigonometriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.5, p. 282–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_282_0>

Su alcune identità trigonometriche.

Nota di ANGELO BARZAGHI (a Milano) (*).

Considero il determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \operatorname{sen} x_1 & \dots & \operatorname{sen} x_i & \dots & \operatorname{sen} x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}^r x_1 & \dots & \operatorname{sen}^r x_i & \dots & \operatorname{sen}^r x_n \\ \cos x_1 & \dots & \cos x_i & \dots & \cos x_n \\ \operatorname{sen} x_1 \cdot \cos x_1 & & \operatorname{sen} x_i \cdot \cos x_i & & \operatorname{sen} x_n \cdot \cos x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}^s x_1 \cdot \cos x_1 & & \operatorname{sen}^s x_i \cdot \cos x_i & & \operatorname{sen}^s x_n \cdot \cos x_n \end{vmatrix}$$

dove è $r + s = n - 2$.

Un caso particolare di D *è il determinante considerato nella domanda a pag. 121 del n. 2 di questo « Bollettino » (Aprile 1935).*

Se è $n = 2m$, indico il determinante D rispettivamente con $A(x_1 \dots x_{2m})$ o con $B(x_1 \dots x_{2m})$ secondo che è $r = m - 1$, oppure è $r = m$.

Se è $n = 2m + 1$ ed $r = m$, indico D con $C(x_1 \dots x_{2m+1})$.

Indico con $P(x_1 \dots x_n)$ il prodotto $\mathop{P}\limits_{j=2}^{n} \mathop{P}\limits_{i=1}^{j-1} \operatorname{sen} \dfrac{x_j - x_i}{2}$.

(*) È in risposta alla Domanda n. 2, pag. 121, del numero di Aprile.

Dico che è

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot 2^{m(m+1)} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m+1}) = C(x_1 \ldots x_{2m+1}).$$

$$(\alpha) \qquad 2^{m^2} \cos \frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m}) = \begin{cases} A(x_1 \ldots x_{2m}) \text{ se } m \text{ è pari,} \\ B(x_1 \ldots x_{2m}) \text{ se } m \text{ è dispari,} \end{cases}$$

$$-2^{m^2} \operatorname{sen} \frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m}) = \begin{cases} B(x_1 \ldots x_{2m}) \text{ se } m \text{ è pari,} \\ A(x_1 \ldots x_{2m}) \text{ se } m \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Ne segue che per h arbitrario è $C(x_1 \ldots x_{2m+1}) = C(x_1 + h, x_{2m+1} + h)$; e per h tale che $mh + (-1)^m \cdot \frac{\pi}{2}$ sia multiplo di 2π è

$$A(x_1 \ldots x_{2m}) = B(x_1 + h, \ldots x_{2m} + h).$$

Dimostrazione. — Osservando le differenze fra i termini corrispondenti di due generiche colonne, deducesi che è $D = H \cdot P(x_1 \ldots x_n)$; ed essendo $P(x_1 \ldots x_n)$ e $C(x_1 \ldots x_n)$ di grado $n-1$ in $\operatorname{sen} \frac{x_i}{2}$ e $\cos \frac{x_i}{2}$, mentre $A(x_1 \ldots x_n)$ e $B(x_1 \ldots x_n)$ sono di grado n, deve essere

$$(1) \qquad C(x_1 \ldots x_{2m+1}) = c_{2m+1} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m+1}),$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} A(x_1 \ldots x_{2m}) &= a_{2m} \cdot H_a \cdot P(x_1 \ldots x_{2m}), \\ B(x_1 \ldots x_{2m}) &= b_{2m} \cdot H_b \cdot P(x_1 \ldots x_{2m}), \end{aligned}$$

dove c_{2m+1}, a_{2m} e b_{2m} sono costanti; mentre è

$$(3) \qquad H_k = f_{1k} \cdot \operatorname{sen} \frac{x_{2m}}{2} + f_{2k} \cdot \cos \frac{x_{2m}}{2} + f_{3k}, \qquad (k = a, b),$$

in cui le f_{ik} non sono funzioni di x_{2m}; e le f_{3k} non possono essere costanti non nulle, perchè ciascuna delle A, B e P è omogenea nelle funzioni seno e coseno delle $2m$ variabili $x_1 \ldots x_{2m}$.

Per trovare le costanti c_{2m+1}, a_{2m}, b_{2m} e le funzioni H_k basta uguagliare in ciascuna delle identità (1) e (2), i coefficienti dei termini di maggior grado in $\operatorname{sen} x_n$ e $\cos x_n$ nei due membri.

Questi termini in $C(x_1 \ldots x_{2m+1})$, $A(x_1 \ldots x_{2m})$ e $B(x_1 \ldots x_{2m})$ sono rispettivamente

$$(4) \qquad B(x_1 \ldots x_{2m}) \cdot \operatorname{sen}^{m-1} x_{2m+1} \cdot \cos x_{2m+1},$$

$$(5) \qquad c_{2m-1} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m-1}) \cdot \operatorname{sen}^{m-1} x_{2m} \cdot \cos x_{2m},$$

$$(6) \qquad (-1)^{m+1} \cdot c_{2m-1} \cdot P(x_1 \ldots x_{2m-1}) \cdot \operatorname{sen}^{m} x_{2m}.$$

Per trovare i corrispondenti termini nello sviluppo dei membri a destra di (1) e (2), si osservi che nello sviluppo di $\overset{2m}{\underset{i=1}{P}} \operatorname{sen} \frac{x_{2m+1} - x_i}{2}$ e di $\overset{2m-1}{\underset{i=1}{P}} \operatorname{sen} \frac{x_{2m} - x_i}{2}$ essi sono dati rispettivamente da

$$(-1)^m \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \cos \frac{2mx_{2m+1} - \sum_1^{2m} x_i}{2},$$

e da

$$(-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{(2m-1)x_{2m} - \sum_1^{2m-1} x_i}{2},$$

e quindi nello sviluppo del membro a destra di (1) sono dati da

$$(7) \qquad (-1)^m \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot c_{2m+1} \cdot P(x_1 \dots x_{2m}) \cdot$$

$$\cdot \left[\cos(mx_{2m+1}) \cdot \cos \frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} + \operatorname{sen}(mx_{2m+1}) \cdot \operatorname{sen} \frac{\sum_1^{2m} x_i}{2}\right],$$

e in quello delle (2) sono dati da

$$(8) \qquad (-1)^m \cdot \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot k_{2m} \cdot P(x_1 \dots x_{2m-1}) \cdot$$

$$\cdot \left[\cos(mx_{2m}) \cdot \left(f_{1k} \cdot \cos \frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2} + f_{2k} \cdot \operatorname{sen} \frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}(mx_{2m}) \cdot \left(f_{1k} \cdot \operatorname{sen} \frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2} - f_{2k} \cdot \cos \frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2}\right)\right],$$

per $k_{2m} = a_{2m}, b_{2m}$. E ricordando che

$$(9) \quad \begin{cases} \text{per } m \text{ pari è} \\ \operatorname{sen}(mx_{2m}) = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \operatorname{sen}^{m-1} x_{2m} \cdot \cos x_{2m} + \Phi_1, \\ \cos(mx_{2m}) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x_{2m} + \Phi_2, \\ \text{e per } m \text{ dispari è} \\ \operatorname{sen}(mx_{2m}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \operatorname{sen}^m x_{2m} + \Phi_3, \\ \cos(mx_{2m}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \operatorname{sen}^{m-1} x_{2m} \cdot \cos x_{2m} + \Phi_4, \end{cases}$$

dove le Φ_i sono di grado minore di m in $\operatorname{sen} x_{2m}$ e $\cos x_{2m}$, deducesi dalle (5), (6) e (8) che per $k_{2m} = a_{2m}$ nella (8) è nullo il coefficiente di $\cos(mx_{2m})$ o quello di $\operatorname{sen}(mx_{2m})$ secondo che m è pari o dispari, e uno dei due coefficienti è uguale ad 1; mentre per $k_{2m}=b_{2m}$ è nullo il coefficiente che prima era uguale a zero, e viceversa. Si ha quindi, per m pari:

$$f_{1a}=f_{2b}=\operatorname{sen}\frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2}, \qquad f_{1b}=-f_{2a}=\cos\frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2},$$

e per m dispari:

$$f_{1a}=-f_{2b}=\cos\frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2}, \qquad f_{1b}=f_{2a}=\operatorname{sen}\frac{\sum_1^{2m-1} x_i}{2},$$

ed è

$$(10) \qquad a_{2m}=b_{2m}=\begin{cases}(-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^m\cdot c_{2m-1} & \text{per } m \text{ pari,}\\ (-1)^{\frac{m+1}{2}}\cdot 2^m\cdot c_{2m-1} & \text{per } m \text{ dispari.}\end{cases}$$

Deve inoltre essere $f_{3k}=0$, perchè si è già osservato che f_{3k} non può essere una costante non nulla e che $H_k(x_1\ldots x_{2m})$ deve essere simmetrico nelle variabili $x_1\ldots x_{2m}$.

Ricordando anche la (3) deducesi

$$(11) \qquad H_a(x_1\ldots x_{2m})=\begin{cases}-\cos\frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} & \text{per } m \text{ pari,}\\ \operatorname{sen}\frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} & \text{per } m \text{ dispari,}\end{cases} \qquad H_b(x_1\ldots x_{2m})=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} & \text{per } m \text{ pari,}\\ -\cos\frac{\sum_1^{2m} x_i}{2} & \text{per } m \text{ dispari.}\end{cases}$$

Dalle (2), (4), (7), (9) e (11) deducesi

$$(12) \qquad b_{2m}=\begin{cases}(-1)^{\frac{m-2}{2}}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot c_{2m+1} & \text{per } m \text{ pari,}\\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot c_{2m+1} & \text{per } m \text{ dispari,}\end{cases}$$

e quindi per la (10) è

$$c_{2m+1}=(-1)^m\cdot 2^m\cdot c_{2m-1},$$

ed osservando che è $c_1 = 1$ deducesi

$$c_{2m+1} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \cdot 2^{m(m+1)}, \tag{13}$$

e quindi è

$$a_{2m} = b_{2m} = -2^{m^2}. \tag{14}$$

Dalle (1), (2), (11), (13) e (14) deduconsi le (α).

OSSERVAZIONE. — In modo analogo si dimostra che per $n = 2m+1$ ed $r = m-1$ è

$$\underset{r=m-1}{D}(x_1 \dots x_{2m+1}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{m^2+m-1} \cdot \left[\sum\limits_1^{2m+1} \cos x_i + \cos \sum\limits_1^{2m+1} x_i \right] \cdot P(x_1 \dots x_{2m+1}) \\ \qquad \text{per } m \text{ pari.} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m^2+m-1} \cdot \left[\sum\limits_1^{2m+1} \cos x_i - \cos \sum\limits_1^{2m+1} x_i \right] \cdot P(x_1 \dots x_{2m+1}) \\ \qquad \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases}$$

e per $n = 2m+1$ ed $r = m+1$ è

$$\underset{r=m+1}{D}(x_1 \dots x_{2m+1}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m+2}{2}} \cdot 2^{m^2+m-1} \cdot \left[\sum\limits_1^{2m+1} \cos x_i - \cos \sum\limits_1^{2m+1} x_i \right] \cdot P(x_1 \dots x_{2m+1}) \\ \qquad \text{per } m \text{ pari.} \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m^2+m-1} \cdot \left[\sum\limits_1^{2m+1} \cos x_i + \cos \sum\limits_1^{2m+1} x_i \right] \cdot P(x_1 \dots x_{2m+1}) \\ \qquad \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases}$$