Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Achille Bassi

Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni. II

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.5, p. 286–292.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_286_0>

Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n dimensioni.

Nota di ACHILLE BASSI (a Torino) (*).

II.

1. Veniamo ad esporre le considerazioni del LUSTERNIK e dello SCHNIRELMANN dalle quali si deduce con chiarezza e rigore che μ_n, se è finito, è $\geq n+1$, contraddicendo quindi l'affermazione del DEHN.

Questi Autori introdussero in recenti lavori ([13]) due invarianti

(*) Continuazione e fine, v. numero precedente.

([13]) Vedi L. LUSTERNIK, *Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie*, (« Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 37, 1930, pagg. 125-130); L. SCHNIRELMANN, *Ueber eine neue kombinatorische In-*

topologici nuovi (la cui considerazione interessa questioni di calcolo delle variazioni), di definizione tra loro simile, chiamati *categorie*.

Richiamiamo la definizione del secondo di questi invarianti, che qui solo interessa, cioè quella della *categoria combinatoria* dello SCHNIRELMANN.

Avvertiamo che, quando non sia altrimenti indicato, ci riferiremo qui e in seguito con la parola *omologia* e con il segno $\backsim$, *esclusivamente alla relazione di omologia mod 2.*

Ciò premesso, un complesso A contenuto in un complesso V si dice, secondo lo SCHNIRELMANN di *prima categoria combinatoria* rispetto a V, quando ogni r–ciclo di A, con $r > 0$ è $\backsim 0$ in V; si dice inoltre che A è di *categoria combinatoria* k rispetto a V, quando *è l'insieme di* k *e non meno complessi parziali di prima categoria combinatoria* rispetto a V. Ciò si indica scrivendo che

$$\text{kat}_V\, A = k.$$

Interessa la nostra questione lo studio della categoria di un n–complesso A, nel caso che A coincida con V. Se, come supporremo, A è costituito da un numero finito di n–simplessi ([14]), poichè ogni n–cella di A è evidentemente di prima categoria rispetto ad A, indicato con $\mu(A)$ il valore che l'invariante μ ha in A, avremo che

$$\text{kat}_A\, A \leq \mu(A). \tag{1}$$

Ora lo SCHNIRELMANN ha dimostrato che esistono varietà, quali ad esempio lo spazio proiettivo (reale) ad n–dimensioni e il toro ad n–dimensioni, che hanno, rispetto a sè stessi, una categoria combinatoria uguale ad $n + 1$. Per la (1), ciò permette di dedurre appunto che μ_n, se è finito, è $\geq n + 1$.

Lo SCHNIRELMANN ha ottenuto questo risultato come conseguenza di un teorema che esso dimostra fondandosi su di un lemma.

Per mettere fuori di dubbio l'esattezza delle nostre conclusioni, ritengo opportuno esporre qui, con alcune chiarificazioni, le dimostrazioni del teorema e del lemma. Esse sono fondate sulle recenti

variante, (« Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 37, 1930, pagg. 131-134); L. LUSTERNIK et L. SCHNIRELMANN, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationels*, (« Exposés sur l'Analyse Mathématique et ses applications », fasc. 188, Paris, Hermann, 1934). V. in special modo le pagg. 39-44.

([14]) In questo caso, ogni r-simplesso di A, se $r < n$, appartiene al contorno di almeno un n-simplesso di A. Quindi, secondo una definizione dello SEIFERT e del THRELFALL (H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, Teubner, 1934, pag. 48), A è un n-complesso *puro*.

teorie della intersezione dei cicli di una varietà e della dualità generale, teorie in cui, come è noto, la topologia moderna ha dimostrato una eccezionale capacità di sintesi.

Date due varietà V e V_1, prive di contorno, di cui la prima contenga la seconda, diremo con lo SCHNIRELMANN che V_1 è un *divisore* (*teiler*) di V, se ogni ciclo di $V_1 \backsim 0$ in V è altresì $\backsim 0$ in V_1. In particolare, poichè V_1 non è $\backsim 0$ rispetto a sè stessa, V_1 non sarà quindi $\backsim 0$ in V.

Ciò premesso, lo SCHNIRELMANN ha dimostrato il seguente

TEOREMA. — *Se una varietà connessa* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0$ *possiede una successione di sottovarietà* $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots \mathrm{V}_r$, *tali che ciascuna sia contenuta nella precedente e sia un divisore di questa, si ha che* $\mathrm{kat}_\mathrm{V}\,\mathrm{V} \geq \mathrm{r} + 1$.

La dimostrazione di esso si fonda sul seguente

LEMMA. — *Nelle ipotesi del teorema esposto, esiste un ciclo* c_{i+1} *di* V *che interseca la* V_i *in un ciclo omologo in* V_i *a* V_{i+1}.

Nella dimostrazione del lemma ci varremo della seguente nota proprietà:

In ogni n*-varietà priva di contorno esistono due sistemi di cicli* c_i *e* d_j, *basi di omologia rispettivamente ad* r *ed* n — r *dimensioni, la cui matrice degli indici mod 2 del Kronecker è l'identità* ([15]).

Due siffatte basi saranno dette, col LEFSCHETZ, basi associate, e si diranno altresì associati due cicli c_i e d_i dell'una e dell'altra base, il cui indice mod 2 del KRONECKER $(c_i \cdot d_i)$ sia uguale ad uno.

È utile altresì la seguente

OSSERVAZIONE. — *In una* n*-varietà qualsiasi* V *un sistema di* $\mathrm{t} \geq 1$ r*-cicli qualsiansi omologicamente indipendenti, fa parte di una base di omologia per gli* r*-cicli di* V, *e, se* V *è priva di con-*

([15]) Questa proprietà, riferita ai cicli e agli indici del KRONECKER ordinari di due basi di omologie con divisione di una varietà orientabile, è un noto risultato del VEBLEN (*The intersection numbers*, « Transaction of the American Mathematical Society », vol. 25, 1923, pagg. 540-550), e del WEYL (*Analysis situs combinatorio*, « Revista Mathematica Hispano Americana », vol. 5, 1923 e vol. 6, 1924; vedi in particolar modo vol. 6, pagg. 1-9; 33-41). Il VEBLEN, nel lavoro citato, accenna (n. 13) alla validità di un teorema analogo, relativo agli indici mod 2 del KRONECKER e ai cicli mod 2 di una varietà anche non orientabile, cioè appunto alla proprietà esposta; questa è stata dimostrata direttamente, come caso particolare di un teorema più generale, dal VAN KAMPEN (*Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*, 'S-Gravenhage 1929, Van Stockum & Zoon, cap. IV, pag. 68, teor. A).

torno, esiste una base degli (n — r)-*cicli*, *associata alla detta base degli* r-*cicli* ([16]).

È noto infatti, in primo luogo, che, data una base di omologia per gli r-cicli di V $\{c_i\}$ ($i=1, 2,..., s$) ogni altro sistema di s r-cicli c_i' è o no una base di omologia, secondochè, posto $c_i' \backsim \varepsilon_{i1}c_1 + ... \varepsilon_{is}c_s$, ove le ε_{ij} sono numeri interi definiti mod 2, la matrice delle ε_{ij} ha o no il determinante $|\varepsilon_{ij}| \equiv 1 \pmod 2$; che, in generale, $t \leq s$ r-cicli $c_1',...; c_t'$ sono o no omologicamente indipendenti, secondo che la matrice delle ε_{ij} contiene o no un minore (almeno) di ordine t, il cui determinante sia $\equiv 1 \pmod 2$.

Ora, se la matrice detta contiene un minore di ordine t di determinante $\equiv 1 \pmod 2$, essa si può facilmente ampliare con l'aggiunta di altre opportune $s-t$ orizzontali di numeri interi, in una matrice quadrata di ordine s, il cui determinante sia $\equiv 1 \pmod 2$ ([17]). I cicli $c'_{t+1},..., c_s'$, corrispondentl alle orizzontali ulteriori della matrice quadrata così ottenuta, costituiscono, insieme ai cicli $c_1',... c_t'$, la base cercata.

Nel ragionamento fatto, la base di omologia $\{c_i\}$, mediante la quale si sono espressi i cicli c_i', è arbitraria. Quindi, se la varietà V è priva di contorno, poichè, per la proprietà già ricordata, essa possiede, in questo caso, una coppia di basi di omologia per gli r-cicli e gli $(n-r)$-cicli tra di loro associate, potremo supporre che la base di omologia degli r-cicli $\{c_i\}$ abbia una base di omologia per gli $(n-r)$-cicli $\{d_i\}$, ad essa associata.

Detta ora E la matrice di numeri interi, di determinante $\equiv 1 \pmod 2$, della sostituzione che trasforma i cicli della base $\{c_i\}$ in quelli della base $\{c_i'\}$, sia F una matrice di numeri interi di determinante $D \equiv 1 \pmod 2$, che trasforma i cicli della base $\{d_i\}$, associata alla $\{c_i\}$, nei cicli di una nuova base $\{d_i'\}$. Poichè si verifica subito che la matrice degli indici del KRONECKER $(c_i' \cdot d_j')$

([16]) La proprietà qui enunciata non è vera quando venga invece riferita ai cicli e agli indici del KRONECKER ordinari, ed alla omologia con divisione. Se, ad esempio, uno dei cicli considerati è multiplo di un altro, essa non può essere verificata.

([17]) Infatti, supposto (cosa non restrittiva) che nella matrice rettangolare un minore A d'ordine t e di determinante $\equiv 1 \pmod 2$ sia quello delle prime t verticali, detta B la matrice delle verticali residue, la matrice quadrata di numeri interi $\begin{vmatrix} A & B \\ O & E \end{vmatrix}$, ove E, complemento algebrico di A, è una matrice identica e lo O è una matrice nulla, ha un determinante $\equiv 1 \pmod 2$.

Teoremi più generali sull'ampliamento di matrici di numeri interi trovansi in L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*. (Bologna, Zanichelli, cap. I).

è la matrice $E \times F$ prodotto orizzontali per orizzontali di E e di F, per determinare una base associata alla $\{c_i'\}$, basterà porre la F uguale alla matrice dei complementi algebrici degli elementi di E. Infatti in tal caso il prodotto per orizzontali di E ed F è una matrice quadrata di elementi tutti nulli, eccetto quelli della diagonale principale, che sono uguali a D; quindi, poichè questi ultimi elementi sono da ridursi mod 2, la detta matrice degli indici mod 2 del KRONECKER è l'identità [18].

2. Veniamo ora alla dimostrazione del lemma e del teorema enunciati.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA. — Siano n, n_i ed n_{i+1} le dimensioni rispettivamente di V, V_i e V_{i+1} $(1 \leq i \leq r - 1)$.

Poichè V_{i+1} non è $\backsim 0$ in V_i, secondo l'osservazione del n.° precedente, questo ciclo appartiene ad una base di omologia per gli n_{i+1}-cicli di V_i e questa ammette una base associata, di cui siano $u_1, u_2,\ldots u_t$ gli $(n_i - n_{i+1})$-cicli. Sia inoltre u_1 il ciclo di quest'ultima base associato a V_{i+1}. Avremo allora che

$$(V_{i+1} \cdot u_1) = 1, \quad (V_{i+1} \cdot u_2) = 0,\ldots, \quad (V_{i+1} \cdot u_t) = 0. \tag{2}$$

Poichè V_i è un divisore di V, gli $(n_i - n_{i+1})$-cicli $u_1, u_2,\ldots, u_t$, che sono omologicamente indipendenti in V_i, sono anche omologicamente indipendenti in V: quindi, per l'osservazione del n.° precedente, essi fanno parte di una base di omologia di V, ed esiste una base di omologia per gli $(n - n_i + n_{i-1})$-cicli di V ad essa associata. Indicato con W_i il ciclo di quest'ultima base associato ad u_1, avremo che:

$$(W_i \cdot u_1) = 1, \quad (W_i \cdot u_2) = 0,\ldots, \quad (W_i \cdot u_t) = 0.$$

Sia ora M_{i+1} l'n_{i+1}-ciclo che, nella teoria moderna delle intersezioni tra cicli di una varietà [19], si definisce come l'intersezione

[18] Si vede inoltre con facilità che i cicli di un'altra eventuale base associata alla $\{c_i'\}$ sono ordinatamente omologhi a quelli della $\{d_i'\}$; che quindi, quando si considera ogni ciclo di V definito a meno di una deformazione omologica (il LEFSCHETZ indica con questa denominazione « *omological deformation* » la sostituzione di un dato ciclo con un suo omologo), la base associata ad una base assegnata di omologia è unica. Di un ciclo, appartenente ad una determinata base, è altresì unico, nel senso ora detto, il ciclo associato che appartiene alla base associata.

[19] Questa teoria si trova sviluppata, per ciò che riguarda le intersezioni tra cicli orientati di varietà orientabili, ad esempio in S. LEFSCHETZ, *Intersections and trasformations of complexes and manifolds* (« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 28, 1926, pagg. 1-29) ed S. LEFSCHETZ, opera citata nell'annotazione n. 9, cap. IV. Per ciò che ri-

mod 2 di W_i e di V_i. Poichè gli indici mod 2 del KRONECKER relativi all'intersezione dei cicli u_j e W_i di V, sono identici a quelli relativi all'intersezione dei cicli u_j e M_{i+1} di V_i, avremo che:

$$(3) \qquad (M_{i+1} \cdot u_1) = 1, \quad (M_{i+1} \cdot u_2) = 0, \ldots, \quad (M_{i+1} \cdot u_t) = 0.$$

Dal confronto della (2) con la (3), risulta che l'n_{i+1}-ciclo di V_i, $M_{i+1} - V_{i+1}$ ha nulli gli indici mod 2 del KRONECKER rispetto a tutti i cicli della base degli $(n_i - n_{i+1})$-cicli di V_i, e che quindi, per un teorema noto ([20]), $M_{i+1} - V_{i+1} \backsim 0$. Esiste quindi un ciclo di W_i di V, tale che $(V_i \cdot W_i) = M_{i+1} \backsim V_{i+1}$, c. v. d.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. — Sia $\mathrm{kat}_V V = m$. Sarà allora

$$V = A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

ove ogni A_i è un complesso parziale di V, per cui $\mathrm{kat}_V A_i = 1$.

Per definizione, ogni k-ciclo ($k > 0$) di A_i è $\backsim 0$ in V e quindi un r-ciclo ($r > n$) qualsiasi di V ha un indice mod 2 del KRONECKER nullo con ogni $(n - r)$-ciclo di A_i. Per un teorema del VAN KAMPEN e del PONTRJAGIN, è quindi possibile determinare in V un r-ciclo omologo a quello dato e completamente esterno ad A_i ([21]).

Riferiamoci ora alla successione dei divisori $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, e consideriamo la successione dei cicli $W_1, W_2, \ldots, W_{r-1}$ tali che

$$(5) \qquad (V_i \cdot W_i) = M_{i+1} \backsim V_{i+1},$$

cicli che certo esistono, a norma del lemma precedente.

Supponiamo poi di avere più volte suddiviso regolarmente la V, sì da potere in essa eseguire quel processo, mediante il quale si definisce il ciclo intersezione di un numero qualsiasi dei cicli W ([22]).

guarda la teoria analoga delle intersezioni mod 2, vedi invece E. R. VAN KAMPEN, lavoro citato nell'annotazione n. 14, capp. III e IV.

([20]) Il teorema a questo analogo, relativo alle intersezioni ordinarie tra cicli orientati di varietà orientabili è dovuto al VEBLEN e al WEYL (citazioni dell'annotazione n. 14). Relativamente alle intersezioni mod 2, questo teorema trovasi dimostrato, come caso particolare di un altro, in E. R. VAN KAMPEN (citazione dell'annotazione n. 14) pag. 69, teorema IV.

([21]) Questo teorema, che può considerarsi un'estensione di quello, citato nell'annotazione precedente, analogo al teorema del VEBLEN e del WEYL, è dimostrato, come caso particolare di un altro, dal VAN KAMPEN (teorema citato nell'annotazione precedente). Lo si ricava inoltre da una formula assai generale del PONTRJAGIN che estende altresì il teorema del VEBLEN e del WEYL (Vedi: *Ueber den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, « Mathematische Annalen », Band 105, 1931, pagg. 165-205; formula (3), pag. 190).

([22]) Vedi a questo proposito, ad esempio l'opera citata del LEFSCHETZ, *Topology*, cap. IV; in special modo il n. 11 e il n. 40.

Indichiamo con $\mathfrak{M}_{i+1}$ il ciclo intersezione di $W_0 = V_1$, $W_1, \dots W_i$, e supponiamo, come risulta lecito da quanto abbiamo sopra osservato, che W_j, per ogni $j \leq i$, sia un ciclo esterno ad A_j. Poichè si ha successivamente

$$(V_1 \cdot W_1) \backsim V_2, \quad (V_2 \cdot W_2) \backsim V_3 \dots (V_i \cdot W_i) \backsim V_{i+1},$$

si avrà altresì che

$$\mathfrak{M}_{i+1} \backsim V_{i+1}.$$

Ora V_{i+1} non è $\backsim 0$ in V, e quindi $\mathfrak{M}_{i+1}$, essendo omologo a V_{i+1}, sarà necessariamente un ciclo non vuoto. D'altra parte $\mathfrak{M}_{i+1}$ è l'intersezione geometrica di opportuni cicli di complessi che reticolano gli insiemi $V - A_1$, $V - A_2, \dots, V - A_i$, ed è quindi un ciclo di un complesso che reticola l'insieme $V - (A_1 + A_2 + \dots + A_i)$.

Supponiamo ora che sia, se possibile, $m = \text{kat}_V V \leq r$. In tale caso esisterebbero, a norma del lemma precedente tutti i cicli W_0, $W_1, \dots, W_{m-1}$ e quindi il ciclo $\mathfrak{M}_m$ loro intersezione. Sarebbe altresì, per le ragioni già dette, $\mathfrak{M}_m \backsim V_m$, e quindi non essendo $V_m \backsim 0$ in V, $\mathfrak{M}_m$ sarebbe un ciclo non vuoto. D'altra parte $\mathfrak{M}_m$ dovrebbe essere contenuto nell'insieme $V - (A_1 + A_2 + \dots + A_m)$, insieme che è vuoto. La conclusione è perciò assurda.

Dunque, nelle ipotesi del teorema, sarà effettivamente $\text{kat}_V V \geq$ $\geq r + 1$, c. v. d.

È assai facile dare esempi di varietà ad n-dimensioni che presentino una successione di n divisori, di dimensioni decrescenti e contenenti ciascuno i successivi.

Tale è ad esempio lo spazio reale proiettivo S_n: tale pure il prodotto topologico di n circonferenze $S_1^{(0)} \times S_1^{(1)} \times \dots \times S_1^{(n)}$. Nel primo caso la successione dei divisori è una qualsiasi successione di spazi subordinati, contenenti ciascuno i successivi S_{n-1}, $S_{n-2}, \dots$, S_1, S_0. Nel secondo caso il divisore V_i può porsi uguale alla varietà subordinata $S_1^{(0)} \times S_1^{(1)} \times \dots \times S_{n-i}^{(n)}$.

La dimostrazione che nell'uno e nell'altro caso le varietà subordinate dette sono dei divisori è del tutto elementare.

La categoria combinatoria di ciascuno di questi spazi rispetto a sè stesso è dunque $\geq n + 1$ ([23]). Tenendo conto della relazione (1), si conclude che in tali varietà l'invariante $\mu \geq n + 1$.

L'inesattezza dell'affermazione del DEHN è quindi dimostrata.

([23]) Considerazioni ulteriori, che è inutile riportare, permettono allo SCHNIRELMANN di concludere che la categoria combinatoria di tali spazi è precisamente $= n + 1$. (Vedi ad esempio L. SCHNIRELMANN, citazione dell'annotazione n. 12, Teor. 1).