Letterio Toscano

Una equazione a matrice circolante

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.5, p. 293–296.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_293_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1935.

Una equazione a matrice circolante.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si considera una particolare equazione a matrice circolante e si dimostra che essa si riduce a un'equazione binomia.*

1. Sia data l'equazione a matrice circolante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{m-1} & a_m - \varkappa k \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots a_m - \varkappa^2 k & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1} & a_m - \varkappa^{m-1}k & a_1 \dots a_{m-3} & a_{m-2} \\ a_m - \varkappa^m k & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

con $\varkappa$ radice m^{esima} dell'unità, e si cerchino in questa nota le sue m radici (1).

Essa può scriversi

$$\begin{vmatrix} a_m - \varkappa^m k & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m - \varkappa^{m-1}k & a_1 \dots a_{m-3} & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots a_m - \varkappa^2 k & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{m-1} & a_m - \varkappa k \end{vmatrix} = 0,$$

ed ancora

$$\begin{vmatrix} a_m - k & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \\ \varkappa a_{m-1} & \varkappa a_m - k & \varkappa a_1 \dots \varkappa a_{m-3} & \varkappa a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varkappa^{m-2} a_2 & \varkappa^{m-2} a_3 & \varkappa^{m-2} a_4 \dots \varkappa^{m-2} a_m - k & \varkappa^{m-2} a_1 \\ \varkappa^{m-1} a_1 & \varkappa^{m-1} a_2 & \varkappa^{m-1} a_3 \dots \varkappa^{m-1} a_{m-1} & \varkappa^{m-1} a_m - k \end{vmatrix} = 0.$$

Considerato ora il determinante

$$C = \begin{vmatrix} a_m & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m & a_1 \dots a_{m-3} & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots a_m & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{m-1} & a_m \end{vmatrix},$$

(1) Questa equazione si è presentata in ricerche sugli *Operatori permutabili con la potenza di uno speciale operatore lineare*, « Rend. R. Accademia Nazionale dei Lincei », seduta del 16 Giugno 1935.

si osserva che sono uguali gli elementi della diagonale principale, e che sono pure uguali fra di loro gli elementi disposti su una parallela alla diagonale principale.

Si denoti con

$$[j_1, j_2, \dots, j_r]$$

il minore diagonale di ordine r in C, formato con le orizzontali e verticali di indici $j_1, j_2, \dots, j_r$; risulta facilmente

$$[j_1, j_2, \dots, j_r] = [j_1+1, j_2+1, \dots, j_r+1] = [j_1+2, j_2+2, \dots, j_r+2] = \\ = \dots = [j_1+t, j_2+t, \dots, j_r+t],$$

dove a j_l+t $(l=1, 2, \dots, r)$ maggiore di m s'intende sostituito un numero minore di m, congruo di j_l+t rispetto ad m.

Infatti per $j_l+t<m$ la cosa è abbastanza evidente in quanto i minori risultano uguali anche nella distribuzione degli elementi, e per $j_l+t>m$ basta eseguire le stesse operazioni di trasposizione su convenienti orizzontali e verticali per riottenere la stessa forma.

Si presenta ora da risolvere la seguente questione:

Dato un minore diagonale di ordine r

$$[j_1, j_2, \dots, j_r],$$

quanti sono gli altri minori diagonali dello stesso ordine ad esso uguali?

Basta vedere per quale valore di t (con la convenzione ammessa su $j_l+t>m$) il minore

$$[j_1+t, j_2+t, \dots, j_r+t]$$

riproduce il minore

$$[j_1, j_2, \dots, j_r],$$

tenendo presente che questo minore non muta per l'ordine delle $j_1, j_2, \dots, j_r$.

Per $t=m$ si ha una prima ed evidente soluzione; ma possono presentarsi valori di $t<m$ per cui si riottenga il primitivo minore.

Così se

$$j_1+t=j_2, \quad j_2+t=j_3, \dots, \quad j_{r-1}+t=j_r, \quad j_r+t=j_1,$$

risulta

$$j_1+t=j_2=j_3-t=j_4-2t=j_5-3t=\dots=j_r-(r-2)t=j_1-(r-1)t$$

e quindi, escluso il caso $t=0$, deve essere $rt=m$, da cui $t=\dfrac{m}{r}$.

Pertanto: se $m=r\nu$, per $t=\nu$ si ha un gruppo di ν minori diagonali uguali di ordine r.

Se $j_1+t,\ j_2+t,\dots,\ j_r+t$ si mutano in $j_1,\ j_2,\dots,\ j_r$ ad s ad s (attraverso s elementi) con s divisore di r si ricava che deve essere $st=m$, da cui $t=\frac{m}{s}$.

Pertanto: se $m=s\nu$, con s divisore di r, per $t=\nu$ si ha un gruppo di ν minori diagonali uguali di ordine r, o più gruppi.

Negli altri casi di corrispondenza tra $j_1+t,\ j_2+t,\dots,\ j_r+t$ e $j_1,\ j_2,\dots,\ j_r$ non è possibile trovare nuovi valori di t, perchè operando su j_l+t si ritorna a j_l dopo p operazioni e p non è costante al variare di l.

Si conclude allora che se m ed r sono primi fra di loro tutti i minori diagonali di ordine r coincidono a m a m; se $m=r\nu$ i minori diagonali di ordine r coincidono a m a m, eccetto un solo gruppo di ν minori coincidenti; e se $m=s\nu$ con s divisore di r, tutti i minori diagonali di ordine r coincidono pure a m a m, eccetto un solo gruppo di ν minori coincidenti, o più gruppi.

2. Si riprenda ora l'equazione a matrice nella sua ultima forma e si sviluppi secondo le potenze di $-k$. Per cose note si sa che il coefficiente di $(-k)^{m-r}$ è dato dalla somma dei minori diagonali di ordine r del determinante

$$\begin{vmatrix} a_m & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \\ \alpha a_{m-1} & \alpha a_m & \alpha a_1 \dots \alpha a_{m-3} & \alpha a_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{m-2} a_2 & \alpha^{m-2} a_3 & \alpha^{m-2} a_4 \dots \alpha^{m-2} a_m & \alpha^{m-2} a_1 \\ \alpha^{m-1} a_1 & \alpha^{m-1} a_2 & \alpha^{m-1} a_3 \dots \alpha^{m-1} a_{m-1} & \alpha^{m-1} a_m \end{vmatrix},$$

facilmente dedotto da C.

Se m è primo con r il coefficiente di $(-k)^{m-r}$ è dato da somme del tipo

$$\alpha^{j_1+j_2+\dots+j_r-r}(1+\alpha^r+\alpha^{2r}+\dots+\alpha^{(m-1)r})[j_1,\ j_2,\dots,\ j_r],$$

e siccome la somma entro parentesi è nulla si conclude che è pure nullo il coefficiente di $(-k)^{m-r}$.

Se $m=r\nu$ il coefficiente di $(-k)^{m-r}$ è dato da somme del tipo precedente e quindi nulle, più l'espressione

$$\alpha^{j_1+j_2+\dots+j_r-r}(1+\alpha^r+\alpha^{2r}+\dots+\alpha^{(\nu-1)r})[j_1,\ j_2,\dots,\ j_r].$$

Ora α è radice $m=r\nu^{esima}$ dell'unità e $\alpha^r=\beta$ è radice ν^{esima} dell'unità; ma

$$1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{\nu-1} = 0,$$

e quindi anche nel secondo caso il coefficiente di $(-k)^{m-r}$ è nullo.

Se $m = s\nu$, con s divisore di r, come al primo e al secondo caso si trova che il coefficiente di $(-k)^{m-r}$ è nullo.

La equazione assegnata si riduce pertanto a

$$(-k)^m + \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^3 \dots \alpha^{m-2} \alpha^{m-1} \begin{vmatrix} a_m & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_m & a_1 \dots a_{m-3} & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots a_m & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{m-1} & a_m \end{vmatrix} = 0,$$

e poichè $\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^3 \dots \alpha^{m-2} \alpha^{m-1} = 1$, essa può ancora scriversi

$$(-k)^m + (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots a_m & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1} & a_m & a_1 \dots a_{m-3} & a_{m-2} \\ a_m & a_1 & a_2 \dots a_{m-2} & a_{m-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Il precedente determinante circolante $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ è dato da [1]

$$(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m),$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ le radici m^{esime} dell'unità, e

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_m x^{m-1};$$

così risulta

$$k^m = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m).$$

Inoltre l'espressione $\left[\frac{m}{2}\right] + \frac{m(m-1)}{2}$ è sempre pari, e quindi si conclude in definitiva che la data equazione a matrice circolante si riduce alla binomia

$$k^m = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_m),$$

le cui radici si sanno determinare.

(1) E. Pascal, *I Determinanti* (Hoepli, 1923), pp. 113-114.