Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **14** (1935), n.5, p. 312–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1935_1_14_5_312_0>

CORRISPONDENZA

A pag. 47 del « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno XIV, si considerano alcune proprietà dell'espressione

$$Q_{n.\alpha} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^\alpha$$

che possono dedursi direttamente senz'altro coll'osservare che

$$Q_{n.\alpha} = (-1)^n \frac{\Delta^n 0^\alpha}{n!} = (-1)^\alpha \frac{\Delta^n (-n)^\alpha}{n!}$$

come può dimostrarsi applicando la formula che esprime le differenze mediante i valori della funzione. Quindi per $\alpha = n$ il sommatorio è $-n!$ e non $n!$ come ivi si dice.

G. Babini - Santa Fè (Rep. Argentina).

RISPOSTE

3. Circa alla soluzione in numeri interi del sistema

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2 + v^2 + (u+v)^2, \quad x^8 + y^8 + z^8 = u^4 + v^4 + (u+v)^4,$$

si supponga $x \leq y \leq z$. Il secondo membro della prima equazione è uguale a $2(u^2 + v^2 + uv)$, il secondo membro della seconda equazione è uguale a $2(u^2 + v^2 + uv)^2$; donde si ha tosto

$$2(x^8 + y^8 + z^8) = (x^4 + y^4 + z^4)^2,$$

e quindi

$$x^8 + y^8 + z^8 = 2(x^4y^4 + y^4z^4 + z^4x^4), \quad x^8 - 2(y^4 + z^4)x^4 + (z^4 - y^4)^2 = 0,$$
$$x^4 = (z^2 \pm y^2)^2, \quad x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y).$$

Indicando con d il M. C. D. di $z + y$ e di $z - y$, si ha di quì $z + y = d \cdot r^2$, $z - y = d \cdot s^2$ ed $x = d \cdot r \cdot s$, con r ed s $(< r)$ primi fra loro. Essendo poi $z = d\ (r^2 + s^2) : 2$ ed $y = d\ (r^2 - s^2) : 2$, si vede tosto che deve essere d pari e dispari uno almeno dei due numeri r ed s, oppure che i tre numeri suddetti devono essere tutti dispari.

Essendo $y^4 + z^4 = d^4\,(r^8 + 6r^4s^4 + s^8) : 8$, dalla prima delle equazioni del sistema considerato si ha

$$d^4(r^8 + 14 \cdot r^4s^4 + s^8) = 16(u^2 + v^2 + uv).$$

Le ipotesi fatte sui numeri d, r ed s sono sufficienti per la divisibilità del primo membro della precedente relazione per 16. Indicandolo con $16 \cdot S$ e posto $u + v = w$, si ha subito $S = w^2 - uv$, donde si vede che u e v sono le soluzioni dell'equazione

$$t^2 - wt + (w^2 - S) = 0.$$

Di quì intanto si vede tosto che deve essere $w^2 > S$ e che u e v sono dati dalla formula

$$(w \pm \sqrt{4S - 3w^2}) : 2\,;$$

sicchè abbiamo anche $w^2 \leq 4S : 3$ e $4S - 3w^2$ quadrato perfetto.

Essendo tale quadrato pari o dispari assieme a w, si vede poi che le condizioni suesposte per d, r, s e w sono sufficienti perchè i numeri u e v risultino anch'essi interi.

Prof. C. Cattaneo - Padova.

Sulla soluzione del medesimo sistema, siano x, y, z numeri pitagorici, $x^2 + y^2 = z^2$. Abbiamo dunque

$$x^4 + y^4 + (\sqrt{x^2 + y^2})^4 = u^2 + v^2 + (u + v^2),$$
$$x^8 + y^8 + (\sqrt{x^2 + y^2})^8 = u^4 + v^4 + (u + v)^4.$$

Queste vengono risolte, se si pone

$$x = m^2 - p^2, \quad y = 2mp,$$
$$u = \frac{(a^2 - 1)(m^2 + p^2)^2 - a(a + 2)(2mp)^2}{a^2 + a + 1},$$
$$v = \frac{(2a + 1)(m^2 + p^2)^2 + (a^2 - 1)(2mp)^2}{a^2 + a + 1},$$
$$x + y = m + p, \quad u + v = \frac{a(a + 2)(m^2 + p^2)^2 - (2a + 1)(2mp)^2}{a^2 + a + 1}.$$

Es.: $m = 2$, $p = 1$, $a = 10$ dà $3^4 + 4^4 + 5^4 = 5^2 + 19^2 + 24^2$; $3^8 + 4^8 + 5^8 = 5^4 + 19^4 + 24^4$.

Dott. A. Moessner - Norimberga.

DOMANDE

4. Esistono progressioni aritmetiche limitate, con più di quattro termini, interi positivi, tali che una potenza dell'ultimo termine sia uguale alla somma delle potenze simili degli altri termini? (Es. per progressione di quattro termini: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$).

Prof. C. Cattaneo - Padova.

5. Si desidererebbero indicazioni bibliografiche intorno alle seguenti questioni di analisi indeterminata:

1°) Risoluzione in numeri interi dell'equazione

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 = 0.$$

2°) Risoluzione in numeri interi del sistema

$$\begin{cases} x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

3°) Risoluzione in numeri interi del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 = 0, \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + x_7^5 = 0. \end{cases}$$

Una soluzione della prima equazione è (7, 43, 57, 80, 100, —107).

Una soluzione del primo sistema è (123, 389, 442, —208, —272, —474).

Una soluzione del secondo sistema è (24, 33, 51, —7, —13, —38, —50).

Dott. Moessner - Norimberga.

Errata. — A pag. 266, riga 6, invece di $a = b$, leggi $a = 3$.