Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulia Ferraris-Pozzolo

Sopra una interpretazione geometrica del secondo teorema della media

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 12–14.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_12_0>

Sopra una interpretazione geometrica del secondo teorema della media.

Nota di GIULIA FERRARIS-POZZOLO (a Vercelli).

Sunto. - *L'A. espone una interpretazione geometrica del secondo teorema della media, di* BONNET, *relativo all' integrale del prodotto di due funzioni.*

Si deve al prof. BOGGIO [1] una interpretazione geometrica assai semplice del teorema della media relativo all' integrale del prodotto di due funzioni.

Considerazioni analoghe permettono di stabilire geometricamente, pure in modo semplicissimo, il secondo teorema della media (dovuto a BONNET, a. 1849), che può enunciarsi così:

Se le funzioni f(x) *ed* f(x)g(x) *sono integrabili nell' intervallo* $a \vdash\!\dashv b$, *e se la* g(x) *varia sempre nello stesso senso in* $a \vdash\!\dashv b$, *allora esiste un valore* c *compreso fra* a *e* b *tale che:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx. \tag{1}$$

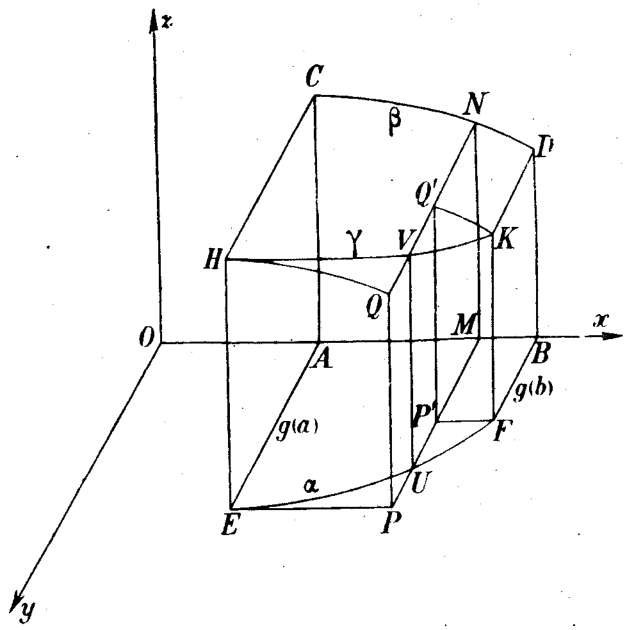
Per semplicità di figura, supporremo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $a \vdash\!\dashv b$, e inoltre la $g(x)$ decrescente in $a \vdash\!\dashv b$.

Diciamo poi α la curva, nel piano Oxy, di equazione $y = g(x)$, e β la curva, nel piano Oxz, di equazione $z = f(x)$, indi conside-

[1] BOGGIO, ***Lezioni di Analisi matematica***, vol. II, pag. 94, 4ª edizione (Rattero, Torino, a. 1934).

riamo le superficie cilindriche che proiettano α parallelamente all'asse Oz e β parallelamente all'asse Oy, le quali si tagliano secondo una curva γ.

Queste superficie cilindriche insieme coi piani Oxy, Oxz e coi



piani normali all'asse Ox nei punti A, B di ascissa a e b racchiudono il solido $ABCDEFHK$, di cui vogliamo calcolare il volume V.

La sezione fatta in questo solido da un piano normale ad Ox nel punto di ascissa generica x è un rettangolo di lati $f(x)$ e $g(x)$, perciò:

$$V = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

D'altra parte il solido considerato può decomporsi nella somma di due volumi in questo modo: immaginiamo il piano normale all'asse Ox nel punto M di ascissa c tale che il volume del solido prismatico di base EPU (essendo EP parallelo ad Ox) e limitato superiormente dalla porzione di superficie cilindrica HQV, sia equivalente al volume dei solido prismatico di base $FP'U$ e limitato superiormente da $KQ'V$; allora è chiaro che il volume del solido iniziale $ABCDEFHK$ vale la somma dei volumi dei solidi $AMCNEPHQ$ e $MBNDP'FQ'K$; ma il primo di questi solidi è un cilindro di base $AMCN$ e altezza AE, perciò vale:

$$g(a)\int_a^c f(x)dx\,;$$

e così il secondo solido vale, similmente:

$$g(b)\int_c^b f(x)dx,$$

e di quì si conclude la (1).