Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giacinta Andruetto

Relazioni tra volumi e superficie di rotazione intorno ad assi paralleli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 14–17.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_14_0>

Relazioni tra volumi e superficie di rotazione intorno ad assi paralleli.

Nota di GIACINTA ANDRUETTO (a Torino).

Sunto. - *Viene stabilita una relazione assai semplice tra i volumi generati dalla rotazione di un'area piana, intorno a due assi paralleli, situati nel suo piano e che non attraversano l'area. Una relazione consimile sussiste per le superficie di rotazione generate da una curva piana che ruota intorno a due assi paralleli.*

Se un'area piana ruota di un giro intorno a due assi paralleli, giacenti nel suo piauo, e che non l'attraversano, genera due volumi tra i quali intercede una relazione assai semplice, che non ho visto finora esplicitamente osservata nè nei migliori trattati nostri di Analisi (BAGNERA, BOGGIO, D'ARCAIS, FUBINI, PICONE, PINCHERLE, SEVERI, VIVANTI, ecc.) nè in libri di Esercizi (FUBINI-VIVANTI, VIVANTI-SIBIRANI, FRENET, TISSERAND, ecc.).

Una relazione pure assai semplice sussiste tra le superficie generate da un arco che ruota di un giro intorno a due assi paralleli. Le due relazioni ora accennate si possono dedurre facilmente dai teoremi di GULDINO, ma qui preferisco darne la dimostrazione diretta, che è estremamente semplice.

1. Consideriamo nel piano Oxy un'area σ, che non attraversi l'asse Ox, e calcoliamo il volume V da essa generato colla rotazione di un giro intorno all'asse Ox.

Per semplicità supponiamo che le parallele all'asse Oy taglino il contorno C dell'area in due soli punti; allora se diciamo P e Q i punti in cui la parallela ad Oy condotta per un punto generico M

di ascissa x incontro C, il volume V risulta notoriamente dato da (fig. 1):

$$V = \pi\int_a^b (MQ^2 - MP^2)dx. \tag{1}$$

Facciamo ora ruotare l'area σ intorno ad una retta r parallela

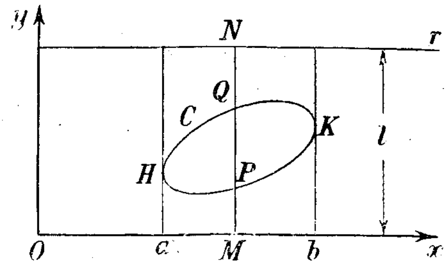

Fig. 1

ad Ox, che non attraversi l'area, ed in guisa che l'area σ sia contenuta nella striscia limitata dalle due parallele x ed r.

Il volume V_1 generato in tal modo risulta analogamente dato da:

$$V_1 = \pi\int_a^b (NP^2 - NQ^2)dx\,;$$

se l indica la distanza delle due parallele x ed r si può scrivere:

$$V_1 = \pi\int_a^b [(l - MP)^2 - (l - MQ)^2]dx, \tag{2}$$

$$V_1 = \pi\int_a^b [2l(MQ - MP) - (MQ^2 - MP^2)]dx,$$

od ancora, per la (1):

$$V_1 = 2\pi l\int_a^b PQdx - V,$$

e poichè l'integrale che qui figura vale l'area σ, si ha:

$$V + V_1 = 2\pi l\cdot\sigma,$$

perciò: *la somma dei volumi generati dalla rotazione di un'area piana intorno a due assi del suo piano, fra loro paralleli, che non attraversano l'area e giacciono da parti opposte dell'area, è eguale all'area data, moltiplicata per la circonferenza avente per raggio la distanza dei due assi.*

Supponiamo ora che gli assi x ed r siano situati dalla stessa parte dell'area σ; in questo caso il volume V_1 risulta dato. non

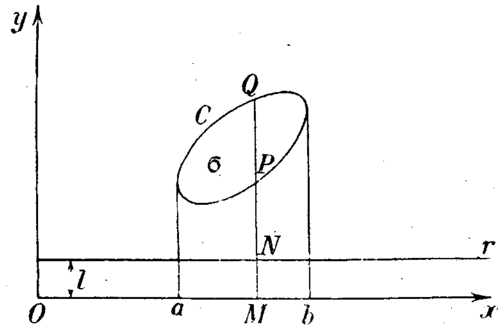

Fig. 2

più dalla (2). ma da (fig. 2):

$$V_1 = \pi\int_a^b [(MQ - l)^2 - (MP - l)^2] dx.$$

cioè

$$V_1 = \pi\int_a^b (MQ^2 - MP^2) dx - 2\pi l \int_a^b PQ dx.$$

ossia

$$V - V_1 = 2\pi l \cdot \sigma.$$

perciò: *la differenza dei volumi generati dalla rotazione di un' area piana intorno a due assi del suo piano, fra loro paralleli, che non attraversano l' area, e giacciono dalla stessa parte dell' area, è eguale all' area data moltiplicata per la circonferenza avente per raggio la distanza dei due assi.*

2. Proprietà analoghe a quelle ora stabilite si hanno per la superficie di rotazione generata dal contorno C.

Limitandoci, per brevità, al caso della figura 1, la superficie S generata dalla rotazione, di un giro, del contorno C intorno all' asse Ox, vale, come è noto:

$$S = 2\pi\int MPds + 2\pi\int MQds,$$

essendo il primo integrale esteso all' arco HPK, ed il secondo esteso all' arco HQK.

La superficie S_1, generata dalla rotazione di C intorno all'asse r. vale, analogamente

$$S_1 = 2\pi\int NPds + 2\pi\int NQds,$$

cioè

$$S_1 = 2\pi\int(l - MP)ds + 2\pi\int(l - MQ)ds,$$

$$S_1 = 2\pi l \cdot C - S,$$

ove l è la lunghezza del contorno C.

Ne segue: *la somma delle superficie generate dalla rotazione di una curva piana intorno a due assi paralleli del suo piano che non attraversano la curva e giacciono da parti opposte di essa è eguale alla lunghezza della curva data moltiplicata per la circonferenza avente per raggio la distanza dei due assi.*

Se invece i due assi stanno dalla stessa parte della curva, allora invece della somma delle due superficie interviene la loro differenza, e si ha un enunciato perfettamente analogo al precedente.