Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Gherardelli

Sulle superficie rigate di 4° grado

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 17–20.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

Sulle superficie rigate di 4° grado.

Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI (a Torino).

Sunto. - *Determinazione dei varî tipi di rigate di 4° grado dello spazio ordinario, assumendo come criterio di classificazione la corrispondenza simmetrica (2, 2) che intercede fra due generatrici incidenti.*

In questo breve scritto è esposta, in modo rapido ed elementare, la classificazione delle rigate di 4° grado ([1]). Sia R una rigata di 4° grado, irriducibile, non cono nè inviluppo piano.

Un piano generico per una generatrice generica sega R in una cubica irriducibile con o senza punto doppio: R è razionale od ellittica. In ogni caso una generatrice generica ne incontra due altre; come criterio di classificazione si assume quì la corrispondenza S simmetrica (2, 2) che associa due generatrici di R allorchè sono incidenti.

([1]) Dopo le classiche ricerche di CAYLEY e CREMONA, molti Autori (CLEBSCH, STURM, VOSS, SALMON, ROHN, MOHRMANN...) hanno trattato delle superficie rigate di 4° grado, da varî punti di vista. Il criterio di classificazione qui scelto è, con qualche variante, quello adottato dal VOSS. (*Zur Theorie der windschiefen Flächen.* « Math. Ann. » (8), 1875).

Nel seguito g è una generatrice variabile di R; g', g'' sono le sue corrispondenti in S.

1. R sia dapprima razionale. Se S è irriducibile come varietà di coppie non ordinate di elementi corrispondenti e non ciclica (non generata da una g_3^1), R è certo priva di direttrice rettilinea ed appartiene perciò ad un sol complesso lineare non speciale. Il luogo del punto gg' e l'inviluppo del piano gg' sono poi irriducibili, perchè in corrispondenza birazionale con la varietà delle coppie gg': d'altronde il piano gg', non contenendo fuori di g, g' altre rette di R, ha comuni con il luogo del punto gg' tre punti distinti e non allineati: quel luogo è pertanto una C^3 sghemba irriducibile. La R si compone delle corde di questa C^3 appartenenti ad un complesso lineare non speciale; e dualmente (1. CREMONA) [1].

2. S, ancora irriducibile, sia ciclica. Le tre rette distinte $gg'g''$ di un ciclo variabile o appartengono ad un piano (non ad un punto) o ad un punto (non ad un piano) o ad un fascio. Nel 1° caso il piano $gg'g''$ sega R in una ulteriore retta h non generatrice e perciò fissa [2]. Il luogo (irriducibile) del punto gg', incontrato da un piano per h in tre punti distinti non allineati, è ancora una C^3 sghemba irriducibile. La R si compone delle corde di C^3 appoggiate ad h (7. CREMONA). Nel 2° caso, duale del primo, la R si compone degli assi in due piani di una C^3 irriducibile appoggiati ad una retta k (8. CREMONA). Nel 3° caso nel piano $gg'g''$ sta una direttrice rettilinea h semplice come luogo (tripla come inviluppo) e per il punto $gg'g''$ passa una direttrice k semplice come inviluppo (tripla come luogo). Le generatrici di R son le rette congiungenti punti omologhi in una corrispondenza (3, 1) fra le h, k (9. CREMONA).

3. S è ciclica con retta fissa g_0. Le tre rette g_0gg' o appartengono ad un piano (non ad un punto) o viceversa; non ad un fascio per l'irriducibilità di R. Nella g_3^1 che genera S, g_0 è elemento doppio: g_0 è dunque generatrice singolare. Siano P_0 e π_0 il punto e il piano comuni a g_0 e alla generatrice successiva. Nel 1° caso il luogo (irriducibile) del punto gg', avendo comune con un piano per h un sol punto variabile, è una conica γ irriducibile contenente P_0: le generatrici di R son le congiungenti punti omologhi

[1] Se il complesso è quello inerente alla C^3, R è la sviluppabile delle tangenti della stessa C^3.

[2] La retta h non passa per alcun vertice del trilatero $gg'g''$, per l'irriducibilità di S.

in una (2, 1) fra g_0 e γ nella quale P_0 è unito (4. CREMONA). Nel 2° caso, duale del primo, l'inviluppo (irriducibile) del piano gg' è un cono quadrico irriducibile Γ contenente π_0. Le generatrici di R sono le intersezioni di piani omologhi in una (2, 1) fra g_0 e Γ, nella quale π_0 è unito (3. CREMONA).

Sia ora S ciclica con due rette fisse g_0, g_1 certo coincidenti per l'irriducibilità di R. Un piano generico per g sega R secondo una γ^3 con punto doppio su g_0 perchè un piano per g_0 contiene una generatrice di R; la quale si compone dunque delle congiungenti punti omologhi in una (1, 1) fra g_0 e γ^3 (10. CREMONA).

4. S si spezza in due involuzioni non degeneri (1). Se la coppia δ, δ' comune alle due involuzioni si compone di rette distinte, il complesso lineare speciale di asse δ e il complesso lineare speciale di asse δ' contengono le stesse quattro generatrici di R; R sta dunque in un complesso speciale, loro combinazione lineare, il cui asse h appartiene al fascio $\delta\delta'$. Delle due generatrici corrispondenti a g l'una, g', passa per il punto gh; l'altra, g'', incontra g, h in punti distinti: altrimenti S sarebbe ciclica. Il punto gg' descrive h e il punto gg'' una conica γ, irriducibile. contenente il punto $\delta\delta'$. Le generatrici di R congiungono punti omologhi in una (2. 2) fra h e γ nella quale il punto $h\gamma$ coincide, nei due modi, con i suoi due corrispondenti (2. CREMONA).

Se $\delta \equiv \delta'$, la generatrice doppia δ non incontra altre generatrici di R. Il piano di δ e del punto gg' (gg'') contiene due ulteriori rette di R non certo generatrici e perciò fisse e coincidenti in un'unica retta h' (h'') luogo del punto gg' (gg''). Le generatrici di R congiungono punti omologhi in una (2, 2) fra h', h'' nella quale due punti di diramazione ($h'\delta$, $h''\delta$) sono omologhi (5. CREMONA).

5. S è un'involuzione (doppia). Ripetendo per la coppia variabile gg' la considerazione fatta sopra per la coppia $\delta\delta'$, si prova che il punto gg' e il piano gg' descrivano una punteggiata e un fascio projettivi aventi un comune sostegno h. Un piano generico per g sega R in una cubica irriducibile con punto doppio P certo esterno ad h, poichè un piano per h contiene due generatrici distinte di R. Le due generatrici di R passanti per P, omologhe in S, coincidono dunque in un'unica retta δ, doppia per R, poichè P non sta su h. Un piano generico per δ sega ulteriormente R in una conica γ irriducibile e su γ i piani per h staccano un'involu-

(1) L'ipotesi che una o entrambe le involuzioni sieno degeneri conduce a casi già trattati.

zione projettiva alla punteggiata h; ne risulta una (1, 2) fra h e γ e la R si compone delle congiungenti punti omologhi in questa corrispondenza (6. CREMONA).

6. R sia ora ellittica. Se g', g'' sono distinte, distinti sono anche i punti gg', gg'' altrimenti R avrebbe punti tripli. Un piano per g ha comuni con il luogo del punto gg' due punti distinti di g: quel luogo è dunque del 2° ordine, non piano per l'irriducibilità di R e perciò composto di due rette sghembe h', h''. La S si scinde in due involuzioni razionali (due g_2^1) e le generatrici di R congiungono punti omologhi in una (2, 2) fra h', h'' (11. CREMONA).

Se $g' \equiv g''$ la S si riduce ad un'involuzione (doppia): il punto gg' e il piano gg' descrivono una punteggiata e un fascio projettivi con uno stesso sostegno h. Un piano generico per g sega R in una γ^3 ellittica, sulla quale i piani per h staccano una g_2^1 riferita projettivamente alla punteggiata h. Ne risulta una (1, 2) fra h e γ^3 nella quale il punto ($h\gamma^3$) è unito. Le generatrici di R sono le congiungenti punti omologhi in questa corrispondenza (12. CREMONA).