GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Un teorema sulle equazioni integrali non lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 1–5.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

PICCOLE NOTE

Un teorema sulle equazioni integrali non lineari.

Nota di Giuseppe Scorza Dragoni (a Roma).

Sunto. - *In questa Nota viene dato, per un'equazione integrale lineare o non, un teorema circa l'esistenza di un'unica soluzione.*

In questa breve Nota mi propongo di mostrare rapidamente come un ragionamento, già da me usato (1) per dimostrare che

L'equazione integrale

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy = g(x) \qquad (a < b) \tag{1}$$

ammette una ed una sola soluzione, se il nucleo k(x, y) *è continuo* (2), *simmetrico e semidefinito positivo e se la funzione* f(y, u) *è continua insieme con la* g(x) *e la* $f_u'(y, u)$ (3), *riuscendo*

$$f_u'(y, u) < \alpha < \lambda, \tag{2}$$

dove α *è una costante positiva e* λ *è il primo valore eccezionale (autovalore) del nucleo* k(x, y),

si presti, con lievi varianti, a stabilire anche che:

La (1) *ammette una ed una sola soluzione, se* k(x, y) *è continuo, simmetrico, indefinito e se, ferme restando le ipotesi rimanenti, la* (2)

(1) G. Scorza Dragoni, ***A proposito di un teorema di Golomb sulle equazioni integrali non lineari*** [« Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », serie VI, vol. XXII (1935), pagg. 385-392].

Il ragionamento in discorso è ispirato ai metodi ideati da Caccioppoli per lo studio di problemi non lineari in analisi funzionale.

(2) Naturalmente tutte queste ipotesi di continuità non sono strettamente necessarie.

(3) Naturalmente $f(y, u)$ e $f_u'(y, u)$ sono continue in [illegible] $\leq b$, $-\infty < u < +\infty$; $g(x)$ lo sarà in $a \leq x \leq b$.

è sostituita dalla

$$\beta < f_u'(y, u) < \alpha,$$

dove α *e* β *sono due costanti che soddisfanno alle*

$$\mu < \beta < 0 < \alpha < \lambda, \tag{3}$$

se λ *e* μ *sono rispettivamente il primo valore eccezionale positivo ed il primo valore eccezionale negativo del nucleo* $k(x, y)$.

1. In virtù dei risultati di CACCIOPPOLI, ricordati nella mia Nota citata, la dimostrazione di questo teorema si spezza nella verifica di queste due circostanze:

I) *Il teorema è vero, se la* (1) *si riduce ad essere lineare, se cioè* $f(y, u)$ *è della forma* $p(y)\cdot u$;

II) *Posto, per ogni funzione* $\varphi(x)$ *continua in* $a \leq x \leq b$,

$$\sigma[\varphi(x)] = \int_a^b |f(x, \varphi(x))|\, dx$$

e

$$\psi(x) = \varphi(x) - g(x) - \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy,$$

da $\sigma[\varphi(x)] \to +\infty$ *segue* $\max|\psi(x)| \to +\infty$.

2. La risolubilità della

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, y) p(y) \varphi(y) dy = g(x),$$

quando

$$\beta < p(x) < \alpha, \tag{4}$$

sarà assicurata non appena avremo visto che, nelle ipotesi poste, da

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, y) p(y) \varphi(y) dy = 0 \tag{5}$$

segue identicamente

$$\varphi(x) = 0 \tag{6}$$

per la funzione continua $\varphi(x)$.

A questo scopo poniamo

$$p_1(x) = p(x), \text{ se } p(x) \geq 0; \quad p_1(x) = 0, \text{ se } p(x) < 0;$$
$$p_2(x) = p_1(x) - p(x);$$

di guisa che, per la (4), le due funzioni continue $p_1(x)$ e $p_2(x)$ ve rificano le

$$(7)\qquad 0 \leq p_1(x) \leq \alpha\,; \quad 0 \leq p_2(x) \leq -\beta,$$

mentre la (5) diventa

$$(8)\qquad \varphi(x) - \int_a^b k(x, y)(p_1(y) - p_2(y))\varphi(y)dy = 0.$$

E moltiplichiamo la (8) per $(p_1(x) + p_2(x))\varphi(x) = |p(x)|\varphi(x)$, integrando poi rispetto ad x; otteniamo così, tenuto conto della simmetria del nucleo $k(x, y)$,

$$(9)\qquad \int_a^b p_1(x)\varphi^2(x)dx - \int_a^b\int_a^b k(x, y)p_1(x)\varphi(x)p_1(y)\varphi(y)dxdy +$$
$$+ \int_a^b p_2(x)\varphi^2(x)dx + \int_a^b\int_a^b k(x, y)p_2(x)\varphi(x)p_2(y)\varphi(y)dxdy = 0.$$

Ma, per le note proprietà di minimo dei valori eccezionali di un nucleo simmetrico e per le (3) e le (7),

$$\int_a^b\int_a^b k(x, y)p_1(x)\varphi(x)p_1(y)\varphi(y)dxdy \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b p_1{}^2(x)\varphi^2(x)dx =$$
$$= \frac{\alpha}{\lambda}\int_a^b \frac{p_1(x)}{\alpha}\, p_1(x)\varphi^2(x)dx \leq \frac{\alpha}{\lambda}\int_a^b p_1(x)\varphi^2(x)dx\,;$$

$$\int_a^b\int_a^b k(x, y)p_2(x)\varphi(x)p_2(y)\varphi(y)dxdy \geq \frac{1}{\mu}\int_a^b p_2{}^2(x)\varphi^2(x)dx =$$
$$= \frac{\beta}{\mu}\int_a^b \frac{p_2(x)}{\beta}\, p_2(x)\varphi^2(x)dx \geq -\frac{\beta}{\mu}\int_a^b p_2(x)\varphi^2(x)dx\,;$$

quindi il primo membro della (9) è non minore di

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\int_a^b p_1(x)\varphi^2(x)dx + \left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right)\int_a^b p_2(x)\varphi^2(x)dx\,;$$

e perciò, date le (3) e le $p_1(x)\varphi^2(x) \geq 0$, $p_2(x)\varphi^2(x) \geq 0$, non si annulla se non a patto che si annullino identicamente i prodotti $p_1(x)\varphi(x)$, $p_2(x)\varphi(x)$.

Ma allora dalla (9) segue che è identicamente nullo il prodotto $p(x)\varphi(x)$; e la (5) ci dà senz'altro che è verificata la (6), come volevamo dimostrare.

3. Passiamo ora a dimostrare la II).

A questo scopo osserviamo che — modificando ove occorra $g(x)$ — è lecito supporre $f(x, 0) = 0$; di guisa che si può porre

$$f(x, \varphi(x)) = p(x)\varphi(x)$$

con $p(x)$ continua e data da

$$p(x) = f_u'(x, g(x)\varphi(x)) \qquad (0 < g(x) < 1).$$

Definite allora le funzioni $p_1(x)$ e $p_2(x)$ in maniera analoga a quella tenuta nel numero precedente, di guisa che continuano ad essere soddisfatte le (7), poniamo

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \text{ se } f(x, \varphi(x))\varphi(x) \geq 0; \quad \varphi_1(x) = 0, \text{ se } f(x, \varphi(x))\varphi(x) < 0;$$
$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x):$$

di guisa che

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(x) = 0; \quad p_1(x)\varphi_1(x) = p_1(x)\varphi(x); \quad p_2(x)\varphi_2(x) = p_2(x)\varphi(x); \\ f(x, \varphi_1(x)) = p_1(x)\varphi_1(x): \quad f(x, \varphi_2(x)) = -p_2(x)\varphi_2(x): \\ f(x, \varphi_1(x))f(x, \varphi_2(x)) = 0: \quad f(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi_1(x)) + f(x, \varphi_2(x)): \\ |f(x, \varphi(x))| = |f(x, \varphi_1(x))| + |f(x, \varphi_2(x))|. \end{cases}$$

Di qui appare fra l'altro che, se

$$(11) \qquad \bar{\psi}(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \int_a^b k(x, y)p_1(y)\varphi_1(y)dy + \int_a^b k(x, y)p_2(y)\varphi_2(y)dy.$$

allora la max $|\psi(x)| \to +\infty$ è perfettamente equivalente alla

$$(12) \qquad \max|\bar{\psi}(x)| \to +\infty:$$

e che, se

$$\sigma_i[\varphi_i(x)] = \int_a^b |f(x, \varphi_i(x))|\,dx \text{ [1]} \qquad (i = 1, 2).$$

allora $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$; di guisa che, dimostrare la II) equivale a dimostrare che, se

$$(13) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 \to +\infty,$$

allora è verificata anche la (12).

E moltiplichiamo la (11) per $p_1(x)\varphi_1(x) + p_2(x)\varphi_2(x) = (p_1(x) + p_2(x))\varphi(x)$ ed integriamo rispetto ad x [2].

[1] Si noti che dalle (10) segue che $f(x, \varphi_i(x))$ è una funzione continua di x; l'integrale scritto ha quindi significato.

[2] Si noti che $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, pur potendo non essere eventualmente continue, sono pur sempre limitate e sommabili.

Avremo, come si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli tenuti nel numero precedente e ricordando la prima delle (10),

$$(14)\qquad \int_a^b \bar{\varphi}(x)(p_1(x)\varphi_1(x) + p_2(x)\varphi_2(x))dx \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\int_a^b p_1(x)\varphi_1{}^2(x)dx + \left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right)\int_a^b p_2(x)\varphi_2{}^2(x)dx.$$

Rammentiamo ora che, in virtù di un ragionamento noto [1],

$$\bar{\sigma}_i[\varphi_i(x)] = \int_a^b p_i(x)\varphi_i{}^2(x)dx \qquad (i = 1, 2)$$

è un infinito d'ordine superiore rispetto a σ_i, se $\sigma_i \to +\infty$.

Di qui segue facilmente che anche

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\bar{\sigma}_1 + \left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right)\bar{\sigma}_2$$

è un infinito d'ordine superiore rispetto a $\sigma_1 + \sigma_2$, se è verificata la (13) e la (3).

E di qui, dalle

$$\sigma_i[\varphi_i(x)] = \int_a^b |p_i(x)\varphi_i(x)|\, dx \qquad (i = 1, 2)$$

(conseguenze delle (10)) e dalla (14) si trae subito che, se è verificata la (13), allora vale anche la (12).

[1] Il ragionamento è di CACCIOPPOLI; circa la sua applicabilità al caso attuale, cfr. la ultima delle note poste a piè di pagina nel mio lavoro citato, al quale lavoro rimando anche per le indicazioni bibliografiche.