BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

ENZO MARTINELLI

Sugli insiemi bidimensionali di punti dello spazio fra loro omografici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 20–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_20_0>

Sugli insiemi bidimensionali di punti dello spazio fra loro omografici.

Nota di ENZO MARTINELLI (a Roma).

Sunto. - *Si ottiene, nel campo della geometria differenziale degli insiemi, una caratterizzazione delle* omografie fra insiemi bidimensionali *come corrispondenze biunivoche conservanti le relative sezioni piane.*

1. Il presente lavoro si svolge secondo un moderno indirizzo che può denominarsi assai propriamente, con B. SEGRE (1), *geometria differenziale degli insiemi.* Tale indirizzo — specialmente coltivato dalla Scuola francese del BOULIGAND, ma basato su concetti fondamentali che erano già stati posti da SEVERI (2) — ha di mira lo studio con metodi sintetici delle proprietà infinitesimali degli insiemi geometrici.

Il risultato qui conseguito, in quest'ordine d'idee, è il seguente: *Sia assegnata una corrispondenza biunivoca,* ω, *fra due insiemi*

(1) Cfr. B. SEGRE, *Il teorema di Meusnier nella geometria differenziale degli insiemi,* « Mem. della R. Acc. d'Italia », 1935, vol. VI, t. 2°, p. 1205.

(2) Cfr. la Memoria sopra citata, ove trovansi altresì indicazioni bibliografiche relative all'argomento.

di punti s, s′ *dello spazio, dei quali uno almeno, p. es.* s, *si sappia essere costituito da uno o più pezzi di superficie semplice di* Jordan. *Allora si può asserire che* ω *è necessariamente omografica, non appena si sappia ch' essa muta — senza eccezioni — le sezioni piane di* s, s′ *le une nelle altre.*

Per la prova che vien data dell'asserto, è fatta la seguente ipotesi supplettiva:

a) L'insieme *s*, se non è piano, ammette almeno una corda, non risultante in uno dei due estremi, *corda impropria* (¹) del pezzo σ di superficie di Jordan a cui tale estremo appartiene. (Tale ipotesi è, p. es., largamente soddisfatta non appena σ possieda piano tangente, in un particolare suo punto semplice (²)).

Si mostrerà peraltro, in una prossima Nota, come sia possibile prescindere dall'ipotesi *a*).

Osserviamo che il teorema sopra enunciato si riduce ad una nota proposizione del Fubini (³), quando si resti nell'ambito della geometria differenziale classica; ossia sotto le ipotesi, assai restrittive, che *s*, *s′* siano superficie, e, insieme alla corrispondenza ω, possano rappresentarsi mediante funzioni continue e derivabili.

2. Siano S ed S' gli spazi a cui appartengono rispettivamente i due insiemi di punti *s* ed *s′*. Supponiamo, in un primo tempo, che *s* giaccia tutto in un piano p di S. In tal caso, poichè p ha come intersezione con *s* l'insieme stesso, ne segue intanto l'esistenza di un piano p' di S' contenente tutto *s′* (⁴); pertanto, la

(¹) Dicesi — col Severi — *corda impropria* di un insieme I di punti in un punto O d'accumulazione dell'insieme, una retta (passante per O) la quale sia d'accumulazione per ogni insieme di rette congiungenti le coppie di punti distinti di I, situati in un intorno qualunque di O. (Cfr. p. es., F. Severi, *Lezioni di analisi*, vol. I, Zanichelli (1933), p. 239).

(²) Seguendo la definizione del Severi (cfr. F. Severi, *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*, « Ann. de la Société Polonaise de Math. », t. IX, Cracovia 1930, p. 97, n. 6), diciamo che un punto P di σ è semplice, allorchè ogni corda impropria di σ in P appartiene ad uno stesso piano (piano tangente).

(³) Cfr. G. Fubini, *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 49 (1913-14), p. 542, § 1.

(⁴) È interessante osservare che, se nelle ipotesi del teorema cui c'interessiamo si ammettesse che la corrispondenza fra le sezioni piane di *s*, *s′* — subordinata dalla ω — potesse presentare eccezione, ad es. relativamente alle sezioni di *s* col piano che lo contiene, il teorema non sussisterebbe più. Infatti, p. es., la corrispondenza biunivoca ω che nasce fra una superficie non piana (*s′*) e una sua proiezione (*s*) sopra un piano *p* da un corrispondenza ω fra s e s' muta le sezioni di s con le *rette* di p nelle sezioni di s' con le rette di p', e viceversa.

Sia allora σ un pezzo di superficie di JORDAN appartenente ad s (cioè un pezzo di piano), e P un punto *interno* [1] a σ. La ω individua una corrispondenza fra le rette del fascio φ su p, con centro in P e quelle del fascio φ' su p', con centro nel punto P' (corrispondente in s', mercè ω, al punto P). Tale corrispondenza risulta *biunivoca*, come è facile riconoscere, giacchè P si è supposto interno a σ. Non solo, ma si può addirittura asserire — in base al classico teorema di STAUDT — che risulta proiettiva non appena si rifletta ch'essa conserva i gruppi armonici di rette, poichè un tal gruppo di φ può sempre pensarsi costruito mediante un quadrilatero possedente tutti i vertici interni a σ.

Ciò posto, si deduce facilmente che l'omografia π definita fra p e p' da quattro coppie di punti di s, s' corrispondentisi mercè ω, P_i e P_i' ($i=1, 2, 3, 4$) — dei quali i punti P_i siano interni a σ [2] — subordina la ω; all'uopo basta pensare di costruire π nel modo solito, mediante due opportune proiettività fra i fasci di centri P_1 e P_1', P_2 e P_2'.

Il teorema di cui al n. 1, risulta pertanto stabilito in questo caso particolare, giacchè la proiettività π fra i piani p e p' può a sua volta venir subordinata ad una proiettività Π fra S ed S'.

OSSERVAZIONE. — Limitatamente sempre a questo caso particolare, è chiaro che il teorema sussiste qualunque sia l'insieme di punti s (su p), purchè si sappia che contiene un pezzo bidimensionale di piano.

3. Trattiamo ora il caso generale, in cui s non giace tutto in un piano.

In base all'ipotesi a) del n. 1, esiste una corda AB di s non risultante corda impropria, p. es., in B del pezzo σ di superficie

punto esterno, soddisfa a tutte le condizioni del teorema, eccezion fatta per la sezione di s col piano p a cui appartiene. Ma non è possibile subordinare ad una proiettività dello spazio una corrispondenza fra s ed s'!

(1) Cioè: interno ad un cerchio tutto contenuto in σ. L'esistenza di punti interni a σ risulta dal teorema generale di BROUWER-LEBESGUE, affermante che: « Se un insieme I di punti di un S_n è omeomorfo ad un insieme I' di punti di un altro S_n', ad un punto interno ad I (se esiste), corrisponde un punto interno ad I' ». (Cfr., p. es., F. SEVERI, *Topologia*, Buenos Aires (1931), p. 39).

(2) Naturalmente si devono considerare punti P_i dei quali nessuna terna sia allineata; ne consegue che, altresì, nessuna terna dei corrispondenti punti P_i' risulterà allineata.

di JORDAN, a cui appartiene B. Dico che l'insieme s^* delle rette proiettanti da A i punti di s, nelle condizioni poste, costituisce un *cono solido* [1]. Infatti, proiettando da A un intorno sufficientemente ristretto di B, si ottiene un insieme $\bar{s}^*$ di rette appartenenti ad s^*, in corrispondenz continua e ***biunivoca*** coi punti di quell'intorno; chè altrimenti AB risulterebbe retta limite di rette congiungenti punti distinti di σ, situati in un intorno qualunque di B: quindi corda impropria in B, contro il supposto. Dunque, quell'insieme $\bar{s}^*$ di rette costituisce una varietà bidimensionale [2] di rette nella stella di centro A, e quindi contiene qualche cono circolare solido, in base al già citato teorema di BROUWER-LEBESGUE [3].

Sia ora s'^* l'insieme di rette proiettanti da A' (corrispondente ad A in s') i punti di s'. La corrispondenza ω^* fra i due insiemi di rette s^* e s'^*, che nasce allorchè si dicano corrispondenti rette proiettanti punti corrispondenti di s ed s', risulta ***biunivoca***, come la ω. Infatti è facile provare che, se si hanno eventualmente più punti di s allineati con A, ad essi corrispondono in s' punti allineati con A'; e viceversa [4].

Osserviamo, inoltre, che la corrispondenza ω^* muta le sezioni di s^* ed s'^* coi piani per A ed A', le une nelle altre.

Dunque — tenuta presente l'Osservazione, con cui si chiude il n.° precedente — si può qui applicare il *duale* del risultato ivi stabilito, e trarne che *la corrispondenza ω^* può essere subordinata ad una proiettività tra le due stelle di centri* A *ed* A'.

Ciò posto, è subito visto che esiste un intorno I_A di A su s tale che, essendo $\bar{A}$ un punto di I_A, ogni corda $\bar{A}B$, come la AB, non risulti corda impropria in B di σ. Altrimenti la corda AB sarebbe retta limite di corde improprie $\bar{A}B$, e quindi risulterebbe anch'essa corda impropria, contro il supposto. Si prendano allora in I_A tre

(1) Cioè: contenente qualche cono circolare solido.

(2) Cioè — intendiamo — una varietà che si può porre in corrispondenza biunivoca e continua con i punti di un cerchio.

(3) Cfr. una precedente nota. In questo caso il teorema va applicato all'omeomorfismo che intercede fra un cerchio e la varietà di rette $\bar{s}^*$ della stella di centro A (ove si riguardi la stella come un S_2).

(4) Siano, p. es., X_1, X_2,..., più punti di s allineati con A; ed α, β due piani per essi contenenti altri due punti P, Q di s, *non complanari* con A, X_1, X_2,.... Ad α, β, corrispondono necessariamente due piani *distinti*, α', β' di S', chè altrimenti alla sezione piana di s' contenente i punti A', X_1', X_2',..., P', Q', (corrispondenti su s' dei punti A,..., Q), dovrebbe corrispondere una sezione piana di s contenente A, X_1, X_2,..., P, Q; contro il supposto. Dunque risultano allineati A', X_1', X_2',....

punti A_i $(i=1, 2, 3)$, non allineati; siano poi A_4, A_5 altri due punti di s, tali che la quintupla A_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ non contenga alcuna quaterna complanare (1). Le due quintuple di punti corrispondenti di s ed s', A_i $(i=1,..., 5)$ e A_i' $(i=1,..., 5)$ (2), individuano pertanto una proiettività Π fra S e S'.

È ormai facile provare, come al n.° precedente, che Π subordina la corrispondenza ω fra s ed s'.

(1) Non è difficile persuadersi della effettiva possibilità di scelta di due punti A_4, A_5 su σ, tali che la quintupla A_i $(i=1,..., 5)$ soddisfi a questa condizione. Infatti — dato che escludiamo che si verifichi il caso particolare già trattato al n. 2 — si può intanto prendere il punto A_4 su s, fuori del piano $A_1A_2A_3$. Se qualche punto di s non giace sui piani del tetraedro $A_1A_2A_3A_4$, può scegliersi A_5 su s in modo da soddisfare alle condizioni richieste. In caso contrario, si muti A_4 in un altro punto $\overline{A}_4$ sempre su s, e che giaccia sopra un piano del tetraedro, diverso dal piano $A_1A_2A_3$. (Un tal punto $\overline{A}_4$ esiste certamente, p. es. nell'intorno su s del punto A_4 precedentemente scelto, giacchè s non possiede punti isolati). Il tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ ha in comune con l'altro $A_1A_2A_3\overline{A}_4$ alcune rette e alcuni piani; esiste però ovviamente almeno un piano, p. es. $A_1A_2A_4$, che non coincide con alcun piano del secondo tetraedro. Pertanto s non può giacere tutto anche sui piani di quest'ultimo tetraedro, chè altrimenti il cono proiettante da A_3 i punti di s non risulterebbe solido. Dunque può scegliersi un punto $\overline{A}_5$ su s e fuori dei piani del tetraedro $A_1A_2A_3\overline{A}_4$, soddisfacendo così alle condizioni richieste.

(2) Altresì nessuna quaterna della quintupla A_i' $(i=1,..., 5)$ risulterà di conseguenza complanare.