Recensioni

* Carlo Somigliala: Memorie scelte
* I. Van Mieghem: Étude sur la théorie des ondes
* N. Kryloff e N. Bogoliuboff: Méthodes approchées de la Mécanique non linéaire dans leurs applications à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonnance s'y rapportant
* l. Nielsen: Vorlesungen über Elementare Mechanik
* Vito Volterra e Umberto D'Ancona: Les associations biologiques au point de vue mathématique (B. Levi)
* G. Fano: Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività) (Beniamino Segre)
* L. Godeaux: Les involutions cycliques appartenant à une Surface Algébrique (Beniamino Segre)
* Fano G.: Complementi di Geometria (L. Onofri)
* J. L. Walsh: Interpolation and Approximation by rational Functions in the complex domain
* E. H. Moore: General Analysis. Part. I
* S. Mandelbrojt: Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions
* C. Carathéodory : Variationsrechnung und partielle Differentialgleichunqen erster Ordnung (Basilio Manià)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 25–40.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

RECENSIONI

CARLO SOMIGLIANA: *Memorie scelte.* (Lattes, Torino 1935, L. 60).

Bene han fatto i colleghi e gli scolari di CARLO SOMIGLIANA, in occasione del suo collocamento a riposo, a riunire in un volume le principali Memorie di Lui. Gli studiosi avranno modo di ammirare l'opera scientifica dell'illustre Maestro e trarne ispirazioni per nuove ricerche.

Erano i tempi in cui la teoria matematica dell'elasticità acquistava nuovo impulso al progresso per opera di BETTI e CERRUTI, quando SOMIGLIANA, da poco laureato (1885), si mostrò d'un tratto ricercatore di prim'ordine con una Memoria: « Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi », che diventò presto fondamentale. D'allora la teoria della elasticità fu uno dei principali soggetti delle sue profonde indagini.

In questo volume vediamo ristampate le ben note Memorie: « Sull'equazioni dell'elasticità », « Sull'integrazione per mezzo di soluzioni semplici » (intorno alla quale idea è ritornato felicemente anno scorso); « Ricerche intorno ai fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino », « Sul potenziale elastico », « Sulle deformazioni elastiche non regolari », ed altre concernenti questioni di analisi che a quelle in parte si ricollegano come ricerche sussidiarie.

E dopo così bei risultati ottenuti nei problemi dell'equilibrio, eccolo affrontare con pari fortuna i problemi della dinamica elastica, ispirato sempre dalla stessa feconda idea: di estendere cioè all'equazioni della elasticità il classico procedimento di GREEN che pareva allora solamente adatto all'equazione di LAPLACE. Estensione in molti punti irta di difficoltà; ma che il SOMIGLIANA raggiunge in modo che sembra facile, tanta è la chiarezza del ragionamento e l'eleganza degli sviluppi. In questo Egli è un classico.

Belle pure ed importanti sono le sue ultime ricerche in questo campo: « Sulla propagazione delle onde sismiche », « Sulle onde di RAYLEIGH », riguardo alle quali pareva che ci fosse ben poco da aggiungere.

Appassionato alpinista, e perciò anche curioso dei fenomeni naturali, Egli meditò a lungo sulla natura dei ghiacciai, e diede un bel saggio delle sue ricerche nella Memoria: « Sulla profondità dei ghiacciai », riconosciuta ormai fondamentale in questo campo di studi.

Del suo interessamento alla geofisica ne vediamo il frutto nelle Memorie di questi ultimi anni, qui ristampate: « Sull'estensione del teorema di CLAIRAUT », « Quelques nouveaux principes théoriques en gravimétrie », « Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione », « Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico », « Le relazioni lineari esistenti fra i valori della gravità sul geoide ellissoidico »; Memorie di notevole importanza che completano genialmente le antiche ricerche del compianto PIZZETTI.

Il contributo portato dal SOMIGLIANA al progresso scientifico, e che ora abbiamo sott'occhio in questo bel volume, lascia traccie profonde e perciò durevoli. *p. b.*

I. VAN MIEGHEM: *Étude sur la théorie des ondes.* Paris, Gauthier-Villars, 1934; fr. 30. (Institut belge de recherches radioscientifiques; vol. I).

Questo titolo, che corrisponde a uno dei soggetti più interessanti della fisica-matematica, ci ha fatto ricercare subito il volume con viva curiosità. L'indice delle materie è pure promettente: « discontinuità - condizioni di compatibilità - loro forma invariantiva - analoghe condizioni per le discontinuità delle funzioni tensoriali e loro derivate - le onde compatibili con l'equazioni della fisica-matematica - onde e raggi - sviluppi in serie delle soluzioni - onde compatibili con un sistema d'equazioni differenziali provenienti dal calcolo delle variazioni - problema di CAUCHY - estensione al caso delle funzioni complesse ».

Ma quando sfogliando il volume si vedono comparire formule complicatissime di simboli e d'indici che riempiono, ciascuna da sola, intere pagine; chi non ha il gusto d'allenarsi a una simile ginnastica matematica prova una certa ripugnanza a sottoporsi a quella diligente lettura, a cui lo spingerebbe l'interesse dell'argomento. La soverchia generalità (che poi non pare utile), e l'attrezzatura del calcolo tensoriale oltremodo appesantita di nuovo simbolismo, sono le principali ragioni di questa complicazione formale. E ciò tanto più spiace, quanto più si pensa che i concetti dominanti la teoria e le conseguenze fisiche che se ne traggono sono in verità assai semplici.

A parte questo, si tratta di uno studio completo nei limiti dell'argomento. Esauriente è nei primi Capitoli la ricerca delle condizioni di compatibilità dei diversi ordini relativi a date funzioni scalari e tensoriali discontinue, che vi è fatta in varî modi. Nel Cap. V è dimostrato che le linee bicaratteristiche di HADAMARD d'un qualunque sistema d'equazioni della fisica-matematica sono le linee lungo le quali s'effettua la propagazione dell'onda. Nel Capitolo successivo è messa in evidenza l'identità fra la superficie d'onda considerata quale superficie di discontinuità e l'onda, diciamo, vibratoria dei fisici. Ed altre interessanti considerazioni sono svolte a proposito del problema di CAUCHY. Naturalmente in tanta complicazione di formule gli errori di stampa sono numerosi. Vi provvede una *errata*. *p. b.*

N. KRYLOFF e N. BOGOLIÜBOFF: *Méthodes approchées de la Mécanique non lineaire dans leurs applications à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonnance s'y rapportant.* (Ac. Sciences d'Ukraine).

Nei problemi posti dalla pratica accade sovente che le perturbazioni prodotte da piccole cause sui moti periodici siano di natura non periodica. In questi casi i noti metodi di POINCARÉ e LIAPOUNOFF, validi quando il moto perturbato è esso pure periodico o asintotico a un moto periodico, non sono senz'altro applicabili. Perciò s'imponeva, onde progredire in questo campo, la ricerca di nuovi metodi che penetrassero più a fondo nella natura della perturbazione.

È merito di KRYLOFF e BOGOLIÜBOFF d'esser riusciti in questa difficile ricerca, come risulta dai loro numerosi lavori pubblicati tra il 1932 e 1935, e in particolare da questa Memoria che contiene l'esposizione più generale e perfezionata (per quanto succinta) dei metodi in discorso; metodi che gli Autori chiamano della *meccanica non lineare* « vu qu'elles ont été créées spécialment pour traiter les problèmes relatifs aux oscillations non linéaires ».

Il moto perturbato riguardante il sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^0(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

è definito dall'equazione

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k^0(x_1 x_2 \dots x_n) + \mu X_k'(x_1 \dots x_n t)$$

ove μ è un piccolo parametro e X_k' ha il periodo $\frac{2\pi}{\alpha}$ rispetto al tempo. Gli Autori, sostituendo, in modo molto opportuno, a queste equazioni un sistema alle derivate parziali, ove viene introdotto un numero ω_s assai prossimo alla frequenza ω della soluzione periodica considerata, trattano dapprima il caso in cui questa soluzione sia della forma $x_k = \xi_k(\omega t + \varphi)$, dipendente cioè da un solo parametro φ. Uno degli esponenti caratteristici (LIAPOUNOFF) è nullo: gli altri sono supposti con parte reale negativa. Essi riescono a trovare degli sviluppi in serie per le potenze di μ *privi di termini secolari*. In ciò consiste l'originalità della ricerca e l'importanza del metodo. Inoltre l'ennesima approssimazione si raggiunge con semplici quadrature quando si sia risoluto il problema della prima approssimazione; cosa questa di grande vantaggio. Con questo mezzo si può studiare in particolare l'influenza di forze periodiche sulle oscillazioni caratterizzate dalla costanza delle loro ampiezze e dall'instabilità delle loro frequenze, che si presentano in alcuni importanti problemi della tecnica.

I due casi in cui ω_s è incommensurabile con α oppure commensurabile sono studiati a parte con due metodi diversi: il metodo detto dei piccoli divisori nel primo caso: il metodo di risonanza nel secondo caso, così chiamato dagli Autori perchè applicabile appunto « dans les domaines de résonnance ». Quando $\omega - \frac{p}{q}\alpha$, pur essendo piccolo, risulta grande rispetto a μ, le formule che si ottengono coi due metodi coincidono.

In seguito gli Autori dimostrano che il moto perturbato si approssima asintoticamente a un moto speciale detto quasi-stazionario, rappresentabile (trascurando i termini che s'annullano con μ) come il moto non perturbato i cui parametri (che sono costanti in assenza della perturbazione) diventano funzioni del tempo lentamente variabili. Questi moti alla lor volta si avvicinano asintoticamente, sotto certe condizioni, a un regime stazionario che può essere sincrono o asincrono. Nell'ultimo paragrafo della prima parte della Memoria sono esposte le principali proprietà dei moti perturbati che si scoprono con questi metodi.

Nella seconda parte è affrontato il problema più difficile dello studio della perturbazione d'un regime periodico dipendente da due parametri:

$$x_k = \xi_k(\omega t + \theta, c) \quad \text{con} \quad \xi_k(w + 2\pi, c) = \xi_k(w, c)$$

e $\omega = \omega(c)$, nel qual caso due esponenti caratteristici sono nulli (gli altri sono supposti avere la parte reale negativa). Gli Autori riescono ad adattare abilmente alla risoluzione di questo problema i due metodi accennati di sopra. Essi provano, tra l'altro, l'esistenza di certi particolari regimi che chiamano « accrochés à la résonnance », dei quali mostrano la notevole importanza.

La Memoria è densa di risultati e di accenni a utili applicazioni pratiche, e costituisce il più importante contributo portato in questi ultimi tempi alla risoluzione del problema della perturbazione dei moti periodici, dopo i lavori ben noti di POINCARÉ, LIAPOUNOFF, LEVI-CIVITA e BIRKOFF. *p. b.*

J. NIELSEN: *Vorlesungen über Elementare Mechanik.* (Uebersetzt und bearbeitet von W. FENCHEL). Berlin, J. Springer, 1935.

Questa meccanica elementare che fa parte dei « Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen » (B. XLIV), è veramente la meccanica razionale classica trattata coi metodi più moderni e comprendente quel programma che è presso a poco di tutti i Politecnici e delle Facoltà fisico-matematiche, limitato però quasi esclusivamente alla meccanica dei corpi rigidi.

Trattandosi di materia notissima esposta a fini didattici, non è il caso di parlare qui in particolare del contenuto del libro.

Importerà invece dichiarare che l'esposizione è fatta con molta chiarezza e precisione, utilizzando anche il calcolo vettoriale bene spesso in modo elegante ed opportuno, sebbene il simbolismo usato non sia sempre il più felice (nelle scuole italiane si è fatto di meglio); con che talune teorie sono rese concise ed espressive.

Contiene pure gli elementi della statica grafica che sono utili agli aspiranti ingegneri. Inoltre è corredato di pochi esempi, ma ben scelti, e di figure nitidissime. In complesso ci pare una delle migliori esposizioni didattiche dell'argomento fra quelle che sono comparse nell'ultimo decennio. *p. b.*

VITO VOLTERRA e UMBERTO D'ANCONA: *Les associations biologiques au point de vue mathématique.* N. 243 delle « Actualitès scientifiques et industrielles », Paris, Hermann, 1935; p. 96, frs. 20.

Il volumetto intende informare e mettere a punto intorno alle ricerche matematiche e sperimentali sul problema della coesistenza delle specie biologiche (lotta per la vita). Intorno al 1926-27 alcune ricerche talassografiche del D'ANCONA, condotte con metodo statistico, furono occasione per il VOLTERRA di trattare il problema dal punto di vista matematico. Se egli non fu primo a pensare una tale applicazione analitica (preceduto ad es. dal LOTKA) lo fu certamente a raccoglierne risultati completamente generali con semplicità e varietà di ipotesi. Queste ricerche, apparse dapprima principalmente negli atti accademici dei Lincei, trovarono nel 1931 sistemazione in un trattato del VOLTERRA di cui il « Bollettino » (vol. X, 1931) si è già occupato: la nuova esposizione si presenta, rispetto a quella, come un riassunto che, sorvolando sugli sviluppi particolari, indica al matematico, ed anche al biologo il quale possegga lo strumento matematico solo quanto occorre per intendere il simbolismo, i punti di partenza e le conclusioni raccolte. Questa parte matematica è poi messa a raffronto (assai più che nelle ricordate *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*) coi risultati ottenuti nel campo statistico e sperimentale da una larga schiera di biologi e colle obiezioni fatte da taluno di questi alla teoria matematica. Interessante, anche da un punto di vista più generale circa le applicazioni della matematica alla filosofia naturale, è il rilievo che più volte ricercatori appoggiati alla sola osservazione statistica furono indotti a porre la constatazione di periodicità e di quasi-periodicità in ipotetica relazione con cicli meteorologici (ed anche col ciclo solare) mentre l'indagine matematica le indica come spontanea conseguenza delle relazioni di convivenza fra le specie! L'esposizione è corredata di numerosi diagrammi rappresentanti tanto le conclusioni matematiche quanto i risultati sperimentali: una ricchissima bibliografia chiude il volume.

B. LEVI

G. FANO: *Geometria non euclidea (Introduzione geometrica alla teoria della relatività)*. « Monografie di Matematica applicata »; Bologna, Zanichelli, 1935; pp. 250, L. 55.

La geometria non euclidea, germogliata dal vaglio critico a cui innumerevoli ricercatori — per secoli e secoli — avevano sottoposto la mirabile eredità geometrica lasciataci dai Greci, assurge a vera disciplina circa cent'anni or sono, specialmente mercè l'opera di GAUSS, LOBACEWSKI, G. BOLYAI e, più tardi, di RIEMANN e KLEIN. Oltre che per il proprio contenuto sostanziale e per il confluire in essa di indirizzi geometrici notevoli e svariati, la geometria non euclidea ha importanza fondamentale per i suoi riflessi sulla critica generale dei principî della Scienza e sull'odierna concezione filosofica dell'Universo; da essa, invero, può dirsi abbia preso origine ed impulso quel largo e fecondo movimento di idee, che è culminato nella teoria della relatività einsteiniana.

Malgrado la portata e la bellezza degli sviluppi suaccennati, ai quali pure gli Italiani hanno contribuito in non lieve misura, mancava finora in Italia un Trattato sull'argomento: e questo libro del FANO viene opportunamente incontro ad un bisogno diffuso e sentito degli studiosi. Nel breve volger di 250 pagine, esso offre un quadro suggestivo e completo — se anche in qualche punto fugace — dell'ampia materia, di cui nitidamente illustra i molteplici aspetti, al lume di un bene inteso storicismo. Nei confronti dei Trattati stranieri, l'Opera in questione presenta una particolare perspicuità e snellezza, cui certo non nuoce la varietà degli indirizzi presi in esame.

L'A. perviene a vincere brillantemente la tirannia dello spazio mercè un'esposizione sobria, ma non eccessivamente stringata, accomunata con una sagace dosatura degli argomenti e dei risultati — qualcuno dei quali è, di necessità, solo accennato o riassunto — e con appropriate indicazioni bibliografiche. Egli inoltre si sofferma talora sull'aneddoto o sul particolare biografico, rendendo così ancor più attraente la lettura del libro, già piacevole per l'eleganza e la chiarezza dello stile e per l'accurata veste tipografica.

Il primo dei sei Capitoli in cui l'Opera è divisa, contiene una pregevole introduzione storico-critica sulla teoria delle parallele fino alla metà del secolo XIX (EUCLIDE ed i primi commentatori, WALLIS, SACCHERI, LAMBERT, GAUSS, SCHWEIKART, TAURINUS, LOBACEWSKI, i due BOLYAI), e costituisce una premessa, per sè interessante, utile allo scopo di poter confrontare e giustamente valutare i Capitoli successivi.

Il Cap. II è dedicato ad una trattazione organica minuziosa della geometria iperbolica, nel piano e nello spazio, dal punto di vista elementare. Qui, alle questioni fondamentali sul parallelismo ed alla conseguente considerazione degli elementi impropri ed ideali (presentata per la prima volta in forma organica), vien direttamente riattaccato lo studio dei cicli nel piano e delle sfere, ipersfere, orisfere nello spazio; fino a stabilire nelle loro linee essenziali la trigonometria piana e la trigonometria sferica, e ad introdurre varî tipi notevoli di coordinate (ipercicliche, oricicliche, polari). Un paragrafo complementare dà, quasi sempre senza le rispettive dimostrazioni, notizie intorno alla geometria ellittica, ed agli addentellati fra geometria non euclidea e geometria non archimedea.

Nel Cap. III, dopo avere rapidamente richiamate le prime nozioni sulla geometria intrinseca di una superficie nell'indirizzo di GAUSS, viene — col BELTRAMI — stabilita l'interpretazione (di carattere locale) della geometria piana iperbolica sulle superficie a curvatura costante negativa. Fra queste ultime sono poi particolarmente studiate le superficie rotonde, sulle quali è tosto verificato il risultato di HILBERT (solo accennato per il caso generale) affermante l'impossibilità di realizzare integralmente la geometria piana iperbolica con una superficie a curvatura totale costante negativa. Il Capitolo termina colle rappresentazioni conformi di KLEIN e POINCARÉ del piano iperbolico sul piano euclideo, e colle relative determinazioni di angoli e distanze mediante birapporti, le quali preludono ai successivi sviluppi di carattere gruppale e proiettivo.

Il Cap. IV contiene un'analisi, forzatamente sommaria, della fondamentale Memoria di RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, e dei lavori — che a questa strettamente si collegano — dovuti a BELTRAMI (sugli spazi di curvatura costante ad un qualunque numero di dimensioni), a CHRISTOFFEL e LIPSCHITZ (sulla teoria generale delle forme differenziali quadratiche, con cenni intorno al calcolo differenziale assoluto di RICCI), ed infine a HELMHOLTZ (sulla caratterizzazione delle geometrie euclidea e non euclidee dal punto di vista gruppale, cogli importanti contributi portati in seguito da LIE e HILBERT a tale ordine d'idee).

L'indirizzo metrico-proiettivo di CAYLEY e KLEIN — secondo cui la geometria metrica, sia euclidea che non euclidea, resta subordinata alla geometria proiettiva — è svolto colla dovuta ampiezza e molto acume nel successivo Cap. V: il quale così, fra l'altro, fornisce la prova più semplice e luminosa della indimostrabilità del 5° postulato di EUCLIDE. Le tre metriche ellittica, iperbolica e parabolica (od euclidea), nelle forme di 1ª, 2ª e 3ª specie, sono ivi inquadrate nella geometria proiettiva ed approfondite, dopo di avere ricordata la possibilità di costruire quest'ultima indipendentemente da nozioni metriche. È da rilevare lo studio limpido ed accurato — che qui vien fatto, nei varî casi, tanto sinteticamente che analiticamente — dei movimenti non euclidei, e la semplice deduzione con un passaggio al limite della metrica euclidea dalle metriche non euclidee. Non mancano infine considerazioni di natura topologica (concernenti il piano ellittico, le quadriche di CLIFFORD, ecc.), dalle quali risulta giustificato il così detto problema di CLIFFORD-KLEIN, di cui pure trovasi un rapido cenno.

L'ultimo Capitolo tratta brevemente dell'applicazione della metrica proiettiva, dello spazio a quattro dimensioni, alla teoria della relatività ed allo studio del cronotopo. Esso riesce egregiamente a mettere in evidenza il lato geometrico della teoria della relatività speciale, e contiene anche interessanti indicazioni sulla relatività generale e l'Universo di DE SITTER.

I recenti progressi della Fisica macroscopica appaiono con ciò inquadrati nello sviluppo storico delle idee, come una grandiosa applicazione di concetti e vedute matematiche preesistenti.

BENIAMINO SEGRE

L. GODEAUX: *Les involutions cycliques appartenant à une Surface Algébrique.* « Actualités scient. et industr. », n. 270; Paris, Hermann, 1935; pp. 45.

In questo fascicolo vengono esposti i più notevoli risultati ottenuti da diversi autori, e specialmente dallo stesso GODEAUX, nello studio delle involuzioni appartenenti ad una superficie algebrica ed aventi solo un numero finito di punti uniti. Un'involuzione siffatta — a norma della generalizzazione data dal GODEAUX di un noto teorema di ENRIQUES e SEVERI — risulta necessariamente ciclica (ossia può venir generata da un gruppo ciclico di trasformazioni birazionali della superficie in sè), ciò che agevola l'indagine in modo essenziale.

Premessa la costruzione di un opportuno modello proiettivo F della data superficie algebrica (sul quale le trasformazioni birazionali del gruppo ciclico suddetto operano omograficamente), l'A. distingue i punti uniti dell'involuzione in perfetti e non perfetti, e procede ad uno studio accurato della composizione di tali punti nell'ipotesi che l'ordine dell'involuzione sia un numero primo. L'A. inoltre, accanto alla F, considera utilmente e sistematicamente la superficie Φ rappresentativa dell'involuzione; egli perviene così ad approfondire in molti casi interessanti le particolarità che possono presentare le superficie F e Φ dal punto di vista invariantivo, nonchè le mutue relazioni che fra esse intercedono.

I risultati son esposti con chiarezza, sovente senza dimostrazione: ma in tal caso il lettore è rinviato all'ampio elenco bibliografico che trovasi alla fine.

BENIAMINO SEGRE

FANO G.: *Complementi di Geometria.* Pagg. VIII+246. G. U. F. di Torino, 1935.

Il volume riproduce, in nitida veste litografica, le lezioni tenute dall'A. nel corso di geometria proiettiva per gli studenti del secondo anno di matematica e fisica.

Il precipuo scopo di questi « Complementi » è di far conoscere ai giovani studenti quelle nozioni geometriche (fra l'altro, teoria delle curve algebriche e delle superficie) che, pur non formando oggetto dei normali corsi di geometria analitica e proiettiva, appartengono al comune corredo di cultura generale e costituiscono le basi necessarie per intraprendere gli studi di geometria superiore. L'A. presenta altresì alcuni esempi di questioni di natura più elevata, cui quelle nozioni fondamentali servono d'avviamento: tali sono i cenni sulle Riemanniane delle curve algebriche, sul concetto di genere, con particolare riguardo al suo significato topologico, e sugli integrali Abeliani.

Prima di passare ad un rapido esame del contenuto dei singoli capitoli, mi piace di porre in rilievo, fra i varî pregi dell'opera, la chiarezza ed il rigore dell'esposizione e l'abbondanza di note storiche e di indicazioni bibliografiche inserite nel testo.

Premessi, nei capitoli I, II, alcuni complementi alla teoria delle linee e superficie del secondo ordine, l'A. passa a trattare, nel cap. III, delle cubiche sghembe, definite come intersezione di due quadriche aventi una generatrice a comune. Valendosi delle generazioni proiettive delle cubiche mediante fasci di piani proiettivi e mediante stelle collineari, l'A. stabilisce le più salienti proprietà di queste curve. Il capitolo si chiude con alcune considerazioni sulle singolarità delle proiezioni piane di una cubica.

Nei successivi capitoli IV e V, si trova esposta la teoria generale delle curve algebriche piane con applicazioni al caso delle cubiche. La trattazione, fondata sulla teoria dei punti multipli e della polarità e completata con cenni sulle principali teorie sintetiche, viene presentata in una forma impeccabile dal punto di vista didattico e, in relazione al carattere elementare dell'opera, del tutto esauriente.

Nel cap. VI ed ultimo, il § 1 è dedicato a generalità sulle superficie algebriche. Stabilite così alcune nozioni fondamentali, l'A. tratta diffusamente delle superficie cubiche, delle loro rappresentazioni piane e delle questioni inerenti alle singolarità di tali superficie.

L. Onofri

J. L. Walsh: *Interpolation and Approximation by rational Functions in the complex domain.* « American Mathematical Society, Colloquium Publications », T. XX, New York, 1935, pagg. IX–382.

Nella sua prefazione, l'A. asserisce che una teoria generale della rappresentazione delle funzioni mediante serie di polinomi od in genere di funzioni razionali è troppo vasta per formare oggetto di un unico trattato: vi si dovrebbe comprendere, fra altro, l'intero studio delle serie di Fourier. Egli limita la sua trattazione al campo delle funzioni di variabile complessa e più specialmente delle funzioni analitiche, considerandone la rappresentazione mediante successioni, definite sia per interpolazione, sia per proprietà estremali, di polinomi o di funzioni razionali a poli prefissati; e pur non pretendendo di avere esaurito l'argomento, l'A. si lusinga di avere raggiunto « a certain degree of completeness ».

Dei dodici Capitoli che compongono l'opera, il primo richiama la nozione di funzione analitica, quella di campo come somma di un numero finito od infinito di regioni, l'applicazione del teorema di CAUCHY all'approssimazione delle funzioni mediante funzioni razionali a mezzo di una conveniente scelta dei poli. Nel Cap. II è fatta l'applicazione dei teoremi di LINDELÖF, che legano le distanze dai contorni dei punti di due aree corrispondentesi in una rappresentazione conforme, alla approssimazione mediante polinomi di una funzione analitica data in un'area chiusa di JORDAN. Nel Cap. III sono richiamate le formule di interpolazione di LAGRANGE e di NEWTON, indi vengono considerati connessi sviluppi i cui campi di convergenza sono limitati da lemniscate. I Capp. IV e V contengono accurate e particolareggiate ricerche sulla migliore approssimazione per gli sviluppi in serie di polinomi: in particolare di polinomi di TCHEBICEFF, già considerati da TONELLI; nel Cap. VI vengono riferiti i risultati di RIESZ, FISCHER e WEYL e quelli delle ricerche personali dell'A. sugli sviluppi mediante successioni ortogonali di polinomi relativi alla natura dei coefficienti degli sviluppi e alla valutazione dell'approssimazione. Il Cap. VII tratta della convergenza, massima e semplice, di successioni di polinomi ottenuti per interpolaaione da sistemi di punti più generali di quelli considerati al Cap. III, ad esempio da sistemi di radici dell'unità; i Capp. VIII e IX studiano agli stessi punti di vista le questioni riguardanti la convergenza, il grado di convergenza e la migliore approssimazione negli sviluppi per funzioni razionali aventi poli prefissati; in questo e nel Capitolo successivo è minutamente studiata l'approssimazione nel cerchio unità. Ricerche di approssimazione sotto condizioni ausiliari sono studiate nel Cap. XI per funzioni non analitiche. Infine il Cap. XII si occupa delle questioni di esistenza e di unicità per le funzioni razionali di migliore approssimazione, questioni meno sviluppate nei Capitoli precedenti.

L'opera, nella esposizione assai minuziosa e completa delle numerose e particolareggiate proposizioni, è da raccomandarsi a coloro che vogliano acquistare una adeguata cognizione dello stato attuale di un interessante Capitolo nella teoria delle funzioni analitiche di una variabile. (*u*)

E. H. MOORE: *General Analysis*. Part. I. (With the cooperation of R. W. BARNARD). Ed. dalla « American Philosophical Society », 1935, pagg. VI–231.

Le vedute del matematico americano ELIAKIM HASTINGS MOORE sull'Analisi matematica generale, vedute che egli ha sviluppate nei suoi corsi e nelle numerose sue pubblicazioni, talvolta frammentarie, dal 1906 fino al 1932, anno della sua morte, vengono esposte in modo sistematico nella presente opera, sorta per iniziativa di un Comitato di matematici americani in parte suoi discepoli e sussidiata dalla Società Filosofica Americana. La non facile redazione è stata curata con singolare precisione dal prof. R. W. BARNARD. Il concetto generale cui si è ispirato il MOORE è sostanzialmente espresso da queste sue parole: « L'esistenza di analogie fra gli « aspetti centrali di teorie diverse implica l'esistenza di una teoria « generale che comprende le singole e le unifica rispetto a questo » aspetto centrale ». Tra parentesi, si può notare come a questo concetto si ispiri lo sviluppo dell'algebra moderna. La generalizzazione cui si dedica l'opera consiste nella estensione delle teorie aritmetiche ed algebriche a quei dominî che l'A. chiama quasi-campi (quasi-fields) e in cui vanno compresi gli insiemi finiti od infiniti di numeri reali, di numeri complessi, di quaternioni, di spazi di funzioni e spazi hilbertiano e di HELLINGER: sono ammesse le leggi ordinarie dell'aritmetica, ad eccezione della legge commutativa della moltiplicazione. La parte prima, che ora viene pubblicata, consta dei tre primi capitoli dell'opera: capitoli dedicati alla teoria delle matrici in questi quasi-campi: matrici reciproche, sistemi di equazioni lineari, equivalenza delle matrici, spazi di vettori; più particolarmente studiata, mediante l'introduzione di una operazione di conjugo, la generalizzazione delle matrici hermitiane, i corrispondenti determinanti, la decomposizione in fattori, e più specialmente per le matrici hermitiane positive, una estensione della legge di inerzia di SYLVESTER e l'ortogonalizzazione di un insieme di vettori. In tutta l'opera viene fatto uso, specie nel fissare l'enunciato dei teoremi, di una notazione simbolica che, allo scopo di facilitarne l'intelligenza al lettore, è stata riassunta in uno speciale « glossario » alla fine del volume. L'opera è di lettura non sempre agevole: ma è densa di contenuto e presenta il frutto del lavoro di un forte pensatore. (*u*)

S. MANDELBROJT: *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1935, pagg. VIII–156.

In questo libro, l'A. si è proposto di porre in relazione lo studio delle classi dette *quasi-analitiche* di funzioni con quello delle corrispondenti serie di FOURIER o, meglio, colle successioni de' rispettivi coefficienti. Nei primi Capitoli (I a IV), egli richiama sommariamente i concetti di misura di un insieme lineare, di funzione misurabile, di integrale secondo LEBESGUE, di coefficienti di FOURIER per le funzioni integrabili. Poi, ricordato il concetto (dovuto al nostro CESARO) di sommazione per media aritmetica, e l'importante applicazione che ne ha fatta il FÉJER alla determinazione del limite dei polinomi trigonometrici, dà varî teoremi generali sulle serie di FOURIER, vi applica l'integrale di POISSON, e dà alcune proprietà delle funzioni trascendenti intere in relazione col massimo termine in valore assoluto del loro sviluppo per $|x| = r$, proprietà che generalmente non si trovano nei trattati classici. Nel Capitolo V si inizia la considerazione delle classi di funzioni quasi-analitiche, ed in questo e nei successivi (VI a IX) vengono esposti risultati sull'argomento, dati da DENJOY, CARLEMAN, S. BERNSTEIN, VALIRON, OSTROWSKI ed altri, oltre a non pochi dovuti all'A. stesso. Le considerazioni si svolgono per lo più nel campo reale; in quanto alla quasi-analiticità, essa non viene riguardata come proprietà di una singola funzione, bensì come carattere di una determinata classe di funzioni. Vengono distinte varie classi quasi-analitiche: la classe quasi-analitica I, definita dalla condizione che, essendo $a \dots b$ il loro intervallo di esistenza ed $a < \alpha < \beta < b$, i valori presi da ogni funzione della classe nell'intervallo $\alpha \dots \beta$ la determinino in tutto $a \dots b$; la classe quasi-analitica D, formata da funzioni indefinitamente derivabili e tali che, essendo data una successione di numeri positivi m_n, sia $|f^{(n)}(x)| < k^n m_n$, colla proprietà che $f(x)$ è determinata in tutto $a \dots b$ dai valori assunti da $f(x)$ e dalle sue successive derivate in un punto; la classe quasi-analitica Δ, pure formata da funzioni indefinitamente derivabili e tale che se due funzioni assumono, esse e le loro derivate, gli stessi valori in un punto, esse coincidono in tutto l'intervallo. La classe D è evidentemente contenuta in Δ, ma non viceversa. Con minuziosa trattazione viene stabilita la quasi-analiticità mediante disuguaglianze cui devono soddisfare i coefficienti di FOURIER; viene studiata l'influenza del comportamento della funzione nell'intorno di un punto sull'andamento dei coefficienti di FOURIER; viene definito l'*ordine esponenziale* per lo zero di una funzione e mostrato come la presenza di un tale zero porti a larghe classi quasi-analitiche sotto condizioni espresse a mezzo dei coefficienti di FOURIER; infine l'ultimo Capitolo (X) porge una analogia assai interessante fra il problema della quasi-analiticità e la ricerca, che appartiene alla teoria delle funzioni analitiche propriamente dette, delle singolarità di una funzione definita da uno sviluppo di TAYLOR.

L'opera presenta così una esposizione che può dirsi esauriente di un campo interessante di ricerche nell'analisi delle funzioni, campo in cui non pochi risultati sono stati perfezionati o completati dall'Autore. (*u*)

C. CARATHÉODORY: *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.* B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935, pp. XI+407.

L'A. si propone di dare un nuovo metodo per la trattazione dei problemi di calcolo delle variazioni: metodo che deriva da un'idea di JACOBI, e, prima ancora, da alcune ricerche di HUYGENS e di HAMILTON nel campo dell'ottica geometrica. Queste idee sono state riprese brillantemente in alcune Memorie del nostro BELTRAMI, ma la prima esposizione del calcolo delle variazioni in questo indirizzo è stata data dall'A. nel trattato di FRANK e v. MISES sulle equazioni differenziali della fisica, e ora egli la riprende qui in forma più completa e sistematica.

Secondo il così detto metodo classico, per risolvere un problema di calcolo delle variazioni, si comincia con l'osservare che condizione necessaria affinchè una curva C_0 fornisca un minimo o un massimo dell'integrale che si studia è che su di essa si annulli la variazione prima. Sotto opportune ipotesi di derivabilità per la curva C_0, si dimostra quindi che tale condizione equivale alle equazioni differenziali di EULERO. Resta poi da dimostrare che, viceversa, le curve soddisfacenti alle equazioni di EULERO forniscono effettivamente un estremo. La questione si risolve « in piccolo » con la teoria di WEIERSTRASS, e, per i problemi relativi a integrali curvilinei in forma parametrica, in campi *geodeticamente convessi*, si può risolvere anche « in grande » sfruttando un'idea di HILBERT, la quale permette di dimostrare che, sotto opportune ipotesi, fra tutte le curve continue e rettificabili del campo considerato, congiungenti due punti fissi, esiste almeno una curva soddisfacente alle equazioni di EULERO e sulla quale l'integrale assegnato assume il suo minimo (o massimo) assoluto.

Secondo il metodo della scuola italiana di TONELLI, si stabilisce da prima l'esistenza dell'estremo assoluto con un procedimento diretto che permette di considerare casi più generali che nel metodo classico; si ottengono poi le equazioni di EULERO sotto la forma integrale che ha una maggiore generalità della forma differenziale.

Il CARATHÉODORY invece comincia col determinare un sistema di equazioni differenziali ordinarie le cui curve integrali risolvono il problema di minimo (massimo) « in piccolo » e per questo è indotto a considerare un' equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$H(x_i, S'_{x_i}) = 0$$

nella funzione incognita S, essendo $H(x_i, y_i)$ una funzione di HAMILTON del problema che si studia. Viene di qua un accostamento del calcolo delle variazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine: accostamento che costituisce l'idea di JACOBI a cui abbiamo accennato in principio.

Detta $S(x_i)$ una qualunque soluzione dell' equazione sopra scritta, la famiglia di ipersuperfici

$$S(x_i) = \text{costante}$$

e il campo di curve estremali che viene associato alla $S(x_i)$, costituiscono una configurazione geometrica, che generalizza quella costituita da un fascio di raggi luminosi attraverso un mezzo di indice di rifrazione variabile e dalle superfici « equirifrangenti » di questo mezzo. In questo modo i teoremi di calcolo delle variazioni si possono interpretare come una generalizzazione del principio di FERMAT e delle ricerche di HUYGENS nel campo dell'ottica.

Dopo aver studiato in questo modo il problema dell'estremo « in piccolo » si passa a risolvere la questione dell'estremo assoluto col procedimento di HILBERT.

Per quanto riguarda il formalismo adottato dal CARATHÉODORY dirò che egli fa uso continuo delle coordinate canoniche, della funzione di HAMILTON, e della forma canonica delle equazioni di EULERO, che deriva appunto dalla considerazione della funzione di HAMILTON. L'introduzione delle coordinate canoniche costringe l'A. a limitarsi alla considerazione di problemi regolari, ma si può osservare che indipendentemente dall'uso di tali coordinate e dal metodo qui seguito, si può stabilire l'esistenza della funzione di HAMILTON e si possono mettere sotto forma canonica le equazioni di EULERO anche in certi problemi quasi-regolari del resto molto generali. E dai varî esempi riportati dall'A., la riduzione a forma canonica delle equazioni di EULERO appare come la trasformazione di questo sistema di equazioni del secondo ordine in un sistema di un numero doppio di equazioni del primo ordine che è la più efficace per quanto riguarda l'integrazione effettiva e la determinazione delle proprietà analitiche delle estremali.

In relazione col metodo della scuola italiana possiamo osservare che l'A. si limita a studiare il problema dell'estremo assoluto per gli integrali curvilinei in forma parametrica, mentre il metodo di TONELLI è stato applicato con successo anche ai problemi in forma ordinaria, ai problemi isoperimetrici, agli integrali doppi, ai problemi di LAGRANGE e di MAYER.

Fin qui ci siamo limitati a parlare della parte di questo volume che riguarda direttamente il calcolo delle variazioni; ma l'A. ha voluto premettere, opportunamente, una esposizione dei risultati della teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, benchè i richiami non siano molti e la seconda parte si possa leggere anche indipendentemente dalla prima.

A proposito di questa dobbiamo osservare che non manca in essa qualche imprecisione, che del resto si trova anche in altri trattati sulla teoria delle equazioni alle derivate parziali, e che, più che un difetto della esposizione qui data, è un difetto dello stato attuale della teoria. In particolare, non sempre sono usati con sufficiente precisione i criterî per la dipendenza e indipendenza delle funzioni, e ciò è già stato osservato per altri trattati da KNOPP e SCHMIDT in una Memoria a cui hanno fatto seguito lavori di DOETSCH, KAMKE, BROWN.

Ad ogni modo la prima parte del volume, che dà del resto una esposizione assai sintetica ed efficace della teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, non è che in piccola parte necessaria per comprendere la parte dedicata al calcolo delle variazioni.

Dei metodi del CARATHÉODORY non bisogna dimenticare di dire che hanno avuto ed hanno una grande diffusione specialmente fra i cultori delle applicazioni della matematica alla meccanica e alla fisica, e quindi per chi voglia conoscere i lavori pubblicati in questo indirizzo il libro di cui stiamo parlando è utilissimo. Indipendentemente da ciò, ad ogni studioso di matematica la lettura ne riesce interessante e proficua.

BASILIO MANIÀ