BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Sulle linee di Jordan

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 5–8.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_5_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

Sulle linee di Jordan.

Nota di GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (a Roma).

Sunto. - *L'A. dimostra un teorema sulle linee semplici e aperte che gli sarà utile in una ricerca sulle trasformazioni del piano in sè, topologiche, dirette e dotate di un punto unito.*

In una Nota, pubblicata nei « Rendiconti dei Lincei » [1], manifestavo l'intenzione di dedicare un altro breve lavoro alla esposizione di alcuni teoremi, che mi sarebbero stati utili in una ricerca

[1] G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan.*

legata al teorema generale di BROUWER sulla struttura delle trasformazioni topologiche e dirette di una superficie bilatera in sè [1].

È questo il lavoro annunciato.

1. Richiamo il teorema che costituisce il risultato centrale della mia Nota citata.

Siano $j_1,\dots, j_n$ $(n \geq 2)$ *delle curve semplici e chiuse del piano* α *e sia* J_p *l'insieme dei punti di* j_p *e di quelli che* j_p *separa dall'infinito* $(p = 1,\dots, n)$.

Allora, se $J_1,\dots, J_n$ *presi a due a due hanno in comune almeno un punto interno* [2], *esiste una ed una sola curva semplice e chiusa* j_0 *tale che ogni suo punto appartenga ad una almeno delle* $j_1,\dots, j_n$ *e che ogni punto di* $J_1,\dots, J_n$ *appartenga a* J_0, *se* J_0 *è l'insieme dei punti di* j_0 *e di quelli che* j_0 *separa dall'infinito.*

Osservo poi, cosa che ci sarà utile in seguito, come il ragionamento là svolto per dimostrare l'unicità della curva j_0 in discorso si presti senz'altro a dimostrare che:

Se $j_1, j_2, j_3,\dots$ *è una successione di curve semplici e chiuse di* α, J_p *avendo un significato analogo al precedente* $(p = 1, 2,\dots)$; *e se esiste una curva semplice e chiusa* j_0 *tale che ogni suo punto appartenga a una almeno delle* $j_1, j_2,\dots$ *e che ogni punto di* $J_1, J_2,\dots$ *appartenga a* J_0, *il significato di* J_0 *essendo palese; allora la curva* j_0 *é univocamente determinata da queste proprietà.*

In altri termini, se le curve $j_1, j_2,\dots$ anzi che essere in numero finito sono in infinità numerabile, il teorema d'unicità è sempre valido; riconosceremo implicitamente nel seguito che, sotto ipotesi opportune, continua a valere anche il teorema di esistenza.

2. Di questi risultati faremo ora una applicazione alle linee semplici e aperte, cioè alle immagini biunivoche e bicontinue o, semplicemente, topologiche di una retta.

Sia l_k una linea semplice ed aperta, per $k = 1, 2,\dots$; $P_k(t)$ il punto variabile su l_k, in funzione continua e invertibile con univocità e continuità del parametro t, per $-\infty < t < +\infty$; d_k la distanza di l_k da un conveniente punto fisso O del piano α cui appartengono, per ipotesi, tutte le linee $l_1, l_2,\dots$; e sia, per ogni k,

$$(1) \qquad \lim_{t \to +\infty} \overline{OP}_k(t) = +\infty\,; \quad \lim_{t \to -\infty} \overline{OP}_k(t) = +\infty$$

[1] Il teorema cui si allude è noto sotto il nome di teorema generale di traslazione e non è ancora dimostrato.

[2] Che può variare al variar della coppia considerata.

— di guisa che l_k contiene tutti i propri punti di accumulazione (che giacciano al finito) —, e

(2) $$d_k \neq 0\,; \quad \lim_{k \to +\infty} d_k = +\infty.$$

In virtù della prima delle (2) il punto O non appartiene mai ad l_k; diciamo e_k quello dei due campi (campo = insieme aperto e connesso) individuati da l_k in α che non contiene il punto O e poniamo $E_k = l_k + e_k$.

Supponiamo poi che gli insiemi E_h, E_k abbiano almeno un punto interno in comune per ogni coppia di numeri interi e positivi h e k.

Allora dico che:

Nelle ipotesi poste esiste una linea semplice, aperta e serrata [1] l_0 *tale che ogni suo punto appartenga ad una almeno delle* $\mathrm{l}_1, \mathrm{l}_2, \ldots$ (*di guisa che* l_0 *non contiene* O) *e tale che ogni punto di* E_1, *di* $\mathrm{E}_2, \ldots$ *o appartiene ad* l_0 *od è separato da* O *mediante* l_0. *La curva* l_0 *è univocamente determinata.*

Infatti, mediante una inversione T per raggi vettori reciproci (affinità circolare inversa del MÖBIUS) che abbia come circonferenza unita una circonferenza di centro in O e di raggio minore del più piccolo dei numeri d_1, $d_2, \ldots$ — v. le (2) — trasformiamo la linea semplice aperta e serrata l_k in una curva semplice e chiusa j_k passante per il punto O e l'insieme E_k nell'insieme J_k dei punti di j_k e di quelli che j_k separa dall'infinito.

La linea l_0, se esiste, si muta in una curva semplice e chiusa j_0 che appartiene all'insieme somma di j_1, $j_2, \ldots$ e che contiene o separa dall'infinito ogni punto dell'insieme somma di J_1, $J_2, \ldots$; e viceversa, se j_0 esiste, allora esiste anche l_0 ed è l'immagine di j_0 nella T^{-1}.

Di qui è da quanto si è detto alla fine del n. 1 segue subito che se l_0 esiste, essa è certo determinata in modo unico.

Per dimostare l'esistenza di j_0 basta procedere nel modo che segue. Poniamo

$$i_1 = j_1\,; \quad I_1 = J_1$$

e (v. n. 1) diciamo rispettivamente

$$i_k, \quad I_k$$

la curva semplice e chiusa e l'insieme che nei riguardi di $j_1, \ldots, j_k$ hanno l'ufficio che j_0, J_0 avevano al n. 1 rispetto a $j_1, \ldots, j_n$.

[1] *Serrato* secondo SEVERI è un insieme *chiuso* secondo CANTOR; questa condizioni equivale perfettamente a quella espressa da formule analoghe alle (1).

Allora la successione di insiemi I_1, I_2,... è crescente, com'è palese; diciamone J_0 l'insieme limite.

È allora evidente che J_0 è delimitato da una curva semplice e chiusa j_0 passante per O; difatti J_0 differisce da I_k per un insieme che, in virtù della seconda delle (2), è contenuto in un intorno di O, infinitesimo per k infinitamente grande, lo stesso potendosi dire evidentemente per I_k e per i_k nei riguardi di I_{k+1}, I_{k+2},... e di i_{k+1}, i_{k+2},....

Dopo ciò è chiaro che la curva j_0 così costruita è quella ricercata.