Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Letterio Toscano

Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.1, p. 8–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_1_8_0>

Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *L'Autore richiama le proprietà dei suoi numeri* A_{rs}, *definiti dalle posizioni*

$$A_{r1}=1,\quad A_{rr}=1,\quad A_{rs}=0 \text{ per } s>r,$$
$$A_{rs}=sA_{r-1,s}+(r-s+1)A_{r-1,s-1},$$

e ricava con essi due nuove espressioni dei coefficienti della tangente e dei numeri di BERNOULLI.

1. La ricerca della somma delle particolari serie integro-geometriche [1]

$$1^r x+2^r x^2+3^r x^3+\ldots+k^r x^k+\ldots,$$

con r ed x positivi e $x<1$, mi ha condotto all'introduzione e allo studio del triangolo numerico

$$\begin{array}{lllll}
A_{11} & & & & \\
A_{21} & A_{22} & & & \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \ldots & A_{rr} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

i cui elementi sono definiti dalle posizioni

$$(1)\qquad \begin{gathered} A_{r1}=1,\quad A_{rr}=1, \\ A_{rs}=sA_{r-1,s}+(r-s+1)A_{r-1,s-1}. \end{gathered}$$

[1] L. TOSCANO, *Sulla somma di alcune serie numeriche* («The Tôhoku Mathematical Journal», vol. 38, 1933).

Alcune proprietà dei numeri A_{rs}, che riporterò dal mio citato lavoro, sembrano notevoli; da esse è possibile ottenere due nuove espressioni, semplici ed eleganti, dei coefficienti della tangente e dei numeri di BERNOULLI.

2. Per i numeri A_{rs} valgono le proprietà

$$A_{rs} = A_{r,r-s+1}, \tag{2}$$

$$A_{rs} = \sum_{i=0}^{i=r-s} (r-s-i+1)s^i A_{r-i-1,s-1}, \tag{3}$$

$$A_{rs} = \sum_{i=0}^{i=r-s} (-1)^i \binom{s+i-1}{s-i} (r-s-i+1)!\, K_{r,r-s-i+1} \text{ [1]}, \tag{4}$$

$$A_{s-1,s-r} = \sum_{i=0}^{i=r-1} (-1)^i \binom{s}{i} (r-i)^{s-1} \text{ [2]}. \tag{5}$$

3. La trasformata della

$$F(x) = r!\, K_{rr} - (r-1)!\, K_{r,r-1}x + (r-2)!\, K_{r,r-2}x^2 - \dots +$$
$$+ (-1)^{r-3} 3!\, K_{r3}x^{r-3} + (-1)^{r-2} 2!\, K_{r2}x^{r-2} + (-1)^{r-1} 1!\, K_{r1}x^{r-1} = 0,$$

mediante la sostituzione $x = y + 1$, è una equazione reciproca di prima specie [3] e di grado pari oppure di seconda specie e di grado dispari, secondochè r è dispari o pari.

Detta trasformata può scriversi

$$F(y+1) = A_{r1} - A_{r2}y + A_{r3}y^2 - \dots + (-1)^{r-1}A_{rr}y^{r-1} = 0.$$

Per $r = 2m$ e $y = 1$ si ha $F(y+1) = 0$, da cui $F(x) = 0$ per $x = 2$, e quindi

$$\sum_{i=1}^{i=2m} (-1)^{i-1} i!\, 2^{2m-i} K_{2m,i} = \sum_{i=1}^{i=2m} (-1)^{i-1} A_{2m,i} = 0. \tag{6}$$

(1) I numeri K_{rs}, detti di STIRLING di 2ª specie, sono definiti dalle posizioni

$$K_{r1} = 1, \quad K_{rr} = 1, \quad K_{rs} = 0 \text{ per } s > r,$$
$$K_{rs} = K_{r-1,s-1} + sK_{r-1,s}.$$

(2) Questa relazione non trovasi nella mia citata Nota, ma può dedursi confrontando i risultati in essa contenuti con quelli del MORITZ, nella sua Nota: *On sums of integro-geometric series of any order* (« The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 38, 1933).

(3) Le equazioni reciproche, supposto ordinate secondo le potenze dell'incognita, si dicono di prima o seconda specie secondochè i coefficienti estremi ed equidistanti dagli estremi sono uguali od opposti.

Per $r=2m+1$ e $y=1$ $(x=2)$ si ha invece

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{i=2m+1}(-1)^{i-1}i!\,2^{2m-i+1}K_{2m+1,i}=\sum_{i=1}^{i=2m+1}(-1)^{i-1}A_{2m+1,i}.$$

Posto allora

$$C_n=\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}i!\,2^{n-i}K_{n,i},$$

si conclude per n pari

$$(6')\qquad C_{2m}=0,$$

e per n dispari

$$(7')\qquad C_{2m+1}=\sum_{i=1}^{i=2m+1}(-1)^{i-1}A_{2m+1,i}.$$

Questa ultima, per la (2), si può ancora scrivere

$$(8)\qquad C_{2m+1}=(-1)^m A_{2m+1,m+1}+2\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{i-1}A_{2m+1,i}.$$

Supposto data la $F(y+1)=0$ e operando su di essa la sostituzione $y=x-1$, si ottengono le relazioni inverse della (4)

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&1!\,K_{r1}=\binom{r-1}{r-1}A_{r1},\\
&2!\,K_{r2}=\binom{r-1}{r-2}A_{r1}+\binom{r-2}{r-2}A_{r2},\\
&3!\,K_{r3}=\binom{r-1}{r-3}A_{r1}+\binom{r-2}{r-3}A_{r2}+\binom{r-3}{r-3}A_{r3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(r-1)!\,K_{r,r-1}=\binom{r-1}{1}A_{r1}+\binom{r-2}{1}A_{r2}+\binom{r-3}{1}A_{r3}+\ldots+\\
&\qquad\qquad+\binom{2}{1}A_{r,r-2}+\binom{1}{1}A_{r,r-1},\\
&r!\,K_{rr}=A_{r1}+A_{r2}+A_{r3}+\ldots+A_{rr}.
\end{aligned}\right.$$

E l'ultima ci dice che la somma degli elementi della orizzontale di indice r, del nostro triangolo numerico, è uguale a $r!$

4. Passiamo alle applicazioni. Lo sviluppo in serie della funzione $\operatorname{tg} x$ è dato da

$$\operatorname{tg} x=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n\frac{x^n}{n!},$$

con C_n uguale a zero per n pari e uguale a

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} i!\, 2^{n-i} K_{n,i}$$

per n dispari.

E si può pure scrivere

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg} x = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left\{ \sum_{i=1}^{i=2m+1} (-1)^{i-1} i!\, 2^{2m-i+1} K_{2m+1,i} \right\} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Ma questi coefficienti C_n coincidono con quelli esaminati al n. 3 e quindi la (8) dà una nuova espressione dei coefficienti della tangente con i numeri A_{rs} e permette di assegnare il nuovo sviluppo in serie

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tg} x = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \left\{ (-1)^m A_{2m+1,m+1} + 2 \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i-1} A_{2m+1,i} \right\} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

5. Siano

$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \ldots, \quad B_n, \ldots,$$

i numeri di BERNOULLI, definiti con l'uguaglianza simbolica

$$(B+1)^\nu - B^\nu = \nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove B^ν va sostituito con B_ν.

Si sa che

$$\text{(12)} \qquad B_n = \frac{n}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \frac{i!\, K_{n-1,i}}{2^{i+1}},$$

cioè

$$B_n = \frac{n}{2^n(2^n - 1)} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} i!\, 2^{n-i-1} K_{n-1,i};$$

e per le (6′) e (8), oltre il noto risultato $B_{2m+1=0}$, segue la nuova espressione

$$\text{(13)} \qquad B_{2m+2} = \frac{2m+2}{2^{2m+2}(2^{2m+2} - 1)} \left\{ (-1)^m A_{2m+1,m+1} + 2 \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i-1} A_{2m+1,i} \right\}.$$

Dal confronto delle (8) e (13) si può pure scrivere

$$\text{(14)} \qquad B_{2m+2} = \frac{2m+2}{2^{2m+2}(2^{2m+2} - 1)} C_{2m+1}.$$

6. Il calcolo dei coefficienti della tangente e dei numeri di BERNOULLI con i numeri A_{rs} si fa più rapidamente che con i numeri di STIRLING di 2ª specie, come facilmente si rileva, e crediamo utile presentare il triangolo dei numeri A_{rs} fino a $r = 10$:

1									
1	1								
1	4	1							
1	11	11	1						
1	26	66	26	1					
1	57	302	302	57	1				
1	120	1191	2416	1191	120	1			
1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1.