Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Beniamino Segre

Un problema di geometria numerativa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 49–55.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

PICCOLE NOTE

Un problema di geometria numerativa.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Assegnate comunque in* S_ν *due varietà* V_α, V_β (*con* $\theta = \alpha + \beta - \nu + 1 \geq 0$), *vien determinato l'*ordine *della* V_θ *luogo dei punti di* V_α *che sono congiunti ad un punto* P *generico di* S_ν *mediante rette che si appoggiano a* V_β *in un punto ulteriore: la formula a cui si perviene è stabilita con un procedimento che ne fornisce anche l'*interpretazione geometrico-funzionale.

Date in uno spazio S_ν due qualunque varietà algebriche irriducibili $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ (distinte o coincidenti), aventi rispettivamente ordini a e b e dimensioni α e β, consideriamo le $\infty^{\alpha+\beta}$ rette di S_ν che si ottengono congiungendo due punti A, B, generalmente distinti, presi arbitrariamente il primo su $\mathfrak{A}$, il secondo su $\mathfrak{B}$; e, per semplicità, supponiamo che tali rette non risultino tutte ulteriormente appoggiate nè alla $\mathfrak{A}$ nè alla $\mathfrak{B}$ [1].

Se è

$$\theta = \alpha + \beta - \nu + 1 \geq 0,$$

per un punto P generico di S_ν passano ∞^θ di quelle rette, costituenti un cono algebrico di vertice P; le varietà *luoghi dei punti* A *e* B *d'appoggio delle sue generatrici colle* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ hanno manifestamente lo stesso ordine t, uguale all'ordine del cono suddetto od al suo doppio secondochè $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono distinte o coincidenti. È anzi chiaro che — nel primo caso — si ha precisamente $t = ab$, se le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ si intersecano lungo una varietà di di-

[1] In base ad un risultato che dimostrerò altrove, si ha che ognuna di quelle rette AB incontra una delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, p. es. la $\mathfrak{B}$, fuori dei punti A, B, soltanto se:

1°) $\mathfrak{B}$ *è un'ipersuperficie di* S_ν (*ossia se risulta* $\beta = \nu - 1$); oppure

2°) $\mathfrak{A}$ *sta in uno spazio* S_μ, *di dimensione* $\mu \leq \beta - 1$, *e* $\mathfrak{B}$ *consta di* $\infty^{\beta-\mu}$ V_μ *appartenenti a spazi di dimensione* $\mu + 1$ *passanti per quell'* S_μ.

La trattazione che segue potrebbe facilmente estendersi ai casi esclusi.

mensione regolare $\theta - 1$; ma la determinazione di t è assai meno immediata se non si fa quest'ipotesi.

Orbene, qui stabilisco una formula (di cui mi varrò in un prossimo lavoro) che fornisce quel numero t quando $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ hanno in comune una varietà irriducibile $\mathfrak{C}$, di ordine c e dimensione γ, che sia h-pla per la $\mathfrak{A}$ e k-pla per la $\mathfrak{B}$, nell'ipotesi che *non sia* $\gamma = \theta - 1$, e cioè supposto

$$\eta = \gamma - \theta = \nu - \alpha - \beta + \gamma - 1 \geq 0.$$

Il procedimento dimostrativo con cui ottengo tale formula, ne dà in pari tempo l'interpretazione geometrico-funzionale.

1. Incominciamo coll'introdurre una nozione che ci sarà utile in seguito. Fissato un qualunque punto C di $\mathfrak{C}$, le rette (per esso) posizioni limiti di rette congiungenti un punto A di $\mathfrak{A}$ con un altro punto B di $\mathfrak{B}$, quando A e B (muovendosi rispettivamente su $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$) tendono a C, costituiscono un cono algebrico che — con locuzione già adottata in un caso più generale (1) — può dirsi il *paratingente misto di* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *nel punto* C; se $\mathfrak{B}$ coincide con $\mathfrak{A}$, detto cono riducesi al paratingente (ordinario) di $\mathfrak{A}$ in C, ossia alla varietà delle corde improprie di $\mathfrak{A}$ nel punto C (2). Nel caso generale, quel cono paratingente misto ammette come vertice lo spazio S_γ tangente in C a $\mathfrak{C}$, ha la dimensione $\alpha + \beta - \gamma$, l'ordine hk, e consta di $\infty^{\alpha + \beta - 2\gamma - 2}$ spazi di dimensione $\gamma + 2$ uscenti dal suddetto S_γ; la sua determinazione ed il suo studio non presentano difficoltà, e possono venir effettuati coi metodi impiegati da B. Levi nella ricerca citata, concernente le corde improprie di una curva algebrica.

Presa su $\mathfrak{C}$ una varietà algebrica $\mathfrak{D}$ (eventualmente coincidente colla $\mathfrak{C}$), di dimensione $\delta \leq \gamma$, il *paratingente misto di* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *lungo* $\mathfrak{D}$, ossia il luogo dei paratingenti misti di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ nei singoli punti di $\mathfrak{D}$, è una varietà algebrica generalmente di dimensione $\alpha + \beta - \gamma + \delta$, il cui ordine verrà denominato il *carattere d'immersione simultanea di* $\mathfrak{D}$ *in* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$.

Ciò premesso, se ordinatamente indichiamo con $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_\eta$ le varietà sezioni di $\mathfrak{C}$ con spazi lineari generici di dimensione $\nu - \theta$, $\nu - \theta - 1, \ldots, \nu - \gamma$, e se denotiamo rispettivamente con $u_0, u_1, \ldots, u_\eta$

(1) Cfr. B. Segre, *Il teorema di Meusnier nella geometria differenziale degli insiemi*, « Mem. della R. Acc. d'Italia », t. 6 (1935), p. 1205, Osservazione al n. 2.

(2) Quest'ultima espressione risale a B. Levi, *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*, « Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino », serie II, t. 48 (1898), p. 83.

i caratteri d'immersione simultanea di quelle varietà in $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, la formula annunciata è la seguente

$$(1)\qquad t = ab - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{\eta}).$$

Rileviamo che, in ogni caso, risulta

$$u_{\eta} = hkc;$$

dunque la (1) può anche scriversi sotto la forma

$$(2)\qquad t = ab - hkc - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{\eta-1}),$$

intendendo che ora l'espressione entro parentesi vada soppressa per $\eta = 0$.

2. Per dimostrare la (1) possiamo intanto, senza restrizione, supporre

$$(3)\qquad \theta = \alpha + \beta - \nu + 1 = 0,$$

ossia $\eta = \gamma$, onde la (1) diventa

$$(4)\qquad t = ab - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{\gamma}).$$

Invero, se fosse $\theta > 0$ ci si riduce subito nelle condizioni volute, segando le varietà $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ con un generico $S_{\nu-\theta}$ passante per P ed osservando che il paratingente misto delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in un loro punto C comune, situato genericamente su detto $S_{\nu-\theta}$, viene da questo spazio incontrato secondo il paratingente misto in C delle varietà sezioni di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ con quell'$S_{\nu-\theta}$.

In virtù dell'ipotesi ammessa, vi è sulle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ un numero finito di *coppie di punti* A, B *distinti allineati con* P: e si tratta precisamente di determinare il numero t di queste coppie. A tal fine procediamo nel modo seguente.

Trasformiamo $\mathfrak{B}$, mediante un'omografia ψ, in una varietà $\overline{\mathfrak{B}}$ non avente punti a comune colla $\mathfrak{A}$ [il che è certo possibile in base alla (3)]. Il cono $(P\overline{\mathfrak{B}})$, proiettante $\overline{\mathfrak{B}}$ dal generico punto P, incontra perciò $\mathfrak{A}$ in ab punti distinti, uno qualunque, $\bar{A}$, dei quali è congiunto a P da una retta che si appoggia a $\overline{\mathfrak{B}}$ in un punto, $\bar{B}^*$, distinto da $\bar{A}$; sia $\bar{B}$ il punto di $\mathfrak{B}$ avente $\bar{B}^*$ come omologo nell'omografia ψ. Se si fa *tendere* ψ *con continuità all'omografia identica,* la varietà $\overline{\mathfrak{B}}$ tende alla $\mathfrak{B}$ ed i punti $\bar{B}^*$, $\bar{B}$ di queste tendono, con continuità, ad un medesimo punto B di $\mathfrak{B}$; detta A la posizione limite assunta da $\bar{A}$ su $\mathfrak{A}$, siccome — per costruzione — i punti $\bar{A}$ e $\bar{B}^*$ sono sempre allineati con P, lo stesso potrà dirsi dei loro limiti A, B, i quali però potranno esser due punti distinti o coincidenti. Nel primo caso A, B *costituiscono una delle* t *coppie suddette* e, viceversa, una qualunque di queste è certamente ottenibile col processo indicato [1]. Nel secondo caso A e B coincidono in un punto C, necessariamente situato su $\mathcal{C}$; il numero v dei punti di quest'ultimo tipo che così si hánno è

$$v = ab - t, \tag{5}$$

e basterà determinarlo per poterne immediatamente dedurre t.

3. Definiamo come segue l'anzidetta omografia variabile ψ.

Fissiamo genericamente in S_ν $\gamma+1$ punti $O_1, O_2, \ldots, O_{\gamma+1}$, $\gamma+1$ iperpiani $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\gamma+1}$ e consideriamo (per $r = 1, 2, \ldots, \gamma+1$) l'omologia φ_r di centro O_r, asse π_r e caratteristica variabile x_r. L'omografia

$$\psi_i = \varphi_{\gamma-i+1} \cdot \varphi_{\gamma-i+2} \cdots \varphi_{\gamma+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \gamma)$$

dipende dai parametri $x_{\gamma-i+1}, x_{\gamma-i+2}, \ldots, x_{\gamma+1}$, ed ammette manifestamente come luogo fisso di punti uniti lo spazio $\mathcal{S}_i$ (di dimensione $\nu - i - 1$) comune agli iperpiani $\pi_{\gamma-i+1}, \pi_{\gamma-i+2}, \ldots, \pi_{\gamma+1}$ e come inviluppo fisso di iperpiani uniti lo spazio $\mathcal{O}_i$ (di dimensione i) congiungente i punti $O_{\gamma-i+1}, O_{\gamma-i+2}, \ldots, O_{\gamma+1}$; essa trasforma $\mathcal{B}$ in una varietà, $\overline{\mathcal{B}}_i$, che (per valori generici dei parametri x) si appoggia ad $\mathcal{A}$ precisamente lungo la varietà fissa $\mathcal{C}_{i+1}$ (di dimensione $\gamma - i - 1$), secondo cui $\mathcal{C}$ è segata dallo spazio $\mathcal{S}_i$. La $\mathcal{C}_{i+1}$ viene a mancare per $i = \gamma$, ossia $\overline{\mathcal{B}}_\gamma$ non ha alcun punto in comune colla $\mathcal{A}$: ciò permette di identificare l'omografia

$$\psi_\gamma = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_{\gamma+1}$$

(dipendente dai $\gamma+1$ parametri $x_1, x_2, \ldots, x_{\gamma+1}$) alla ψ considerata nel n.° precedente, onde $\overline{\mathcal{B}}_\gamma$ ora tien luogo della $\overline{\mathcal{B}}$.

Posto, per uniformità di notazioni,

$$\psi_{-1} = 1, \quad \overline{\mathcal{B}}_{-1} = \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}_0 = \mathcal{C},$$

facciamo successivamente *tendere all'unità quei parametri* $x_1, x_2, \ldots, x_{\gamma+1}$, con che appunto la suddetta omografia $\psi = \psi_\gamma$ tende all'identità e la varietà $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_\gamma$ tende alla $\mathcal{B}$, modificandosi — nei successivi passaggi al limite — com'è qui sotto indicato:

$$\begin{gathered} \psi = \psi_\gamma \to \psi_{\gamma-1} \to \ldots \to \psi_0 \to \psi_{-1} = 1 \\ \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_\gamma \to \overline{\mathcal{B}}_{\gamma-1} \to \ldots \to \overline{\mathcal{B}}_0 \to \overline{\mathcal{B}}_{-1} = \mathcal{B}. \end{gathered}$$

Supponiamo che corrispondentemente i punti $\overline{A}$, $\overline{B}^*$, $\overline{B}$, considerati nel n. 2 ordinatamente sulle $\mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$, tendano ai loro li-

[1] Per giustificare quest'ultima affermazione anche per $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, basta proiettare dal punto P le varietà dianzi considerate su di un iperpiano generico.

miti rispettivi A, B, B nel modo seguente:

$$\overline{A} = \overline{A}_\gamma \to \overline{A}_{\gamma-1} \to \dots \to \overline{A}_0 \to \overline{A}_{-1} = A$$
$$\overline{B}^* = \overline{B}_\gamma^* \to \overline{B}_{\gamma-1}^* \to \dots \to \overline{B}_0^* \to \overline{B}_{-1}^* = B$$
$$\overline{B} = \overline{B}_\gamma \to \overline{B}_{\gamma-1} \to \dots \to \overline{B}_0 \to \overline{B}_{-1} = B;$$

ne risulta che (per $i = 0, 1, \dots, \gamma$) il punto $\overline{A}_i$ (giacente su $\mathfrak{A}$) ed il punto $\overline{B}_i^*$ (giacente su $\overline{\mathfrak{B}}_i$) sono allineati col punto P, mentre $\overline{B}_i$ — che è il punto di $\mathfrak{B}$ che dall'omografia ψ_i vien trasformato nel punto $\overline{B}_i^*$ — sta con quest'ultimo punto su di una retta appoggiata allo spazio Θ_i.

Osserviamo inoltre che i due punti $\overline{A}_{i-1}$, $\overline{B}_{i-1}^*$ coincidono, sempre e solo ch'essi si identifichino con un punto C_i della varietà $\mathfrak{C}_i$ (segata da $\mathfrak{F}_{i-1}$ su $\mathfrak{C}$) luogo dei punti fissi comuni alle $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{B}}_{i-1}$. Un punto siffatto risulta quindi unito per le omografie $\psi_{i-1}, \psi_{i-2}, \dots, \psi_0, \psi_{-1} = 1$, onde in esso vengono a coincidere tutti i punti $\overline{A}_j$, $\overline{B}_j^*$, $\overline{B}_j$ di indice $j \leq i-1$ e, in particolare, in tal caso si ha $A = B = C_i$. Dunque, se per i fissato $(= 0, 1, \dots, \gamma)$ accade precisamente v_i volte che risulti

$$\overline{A}_{i-1} = \overline{B}_{i-1} = \overline{B}_{i-1}^* = C_i, \quad \text{ma} \quad \overline{A}_i \neq \overline{B}_i^*, \tag{6}$$

in base alla fine del n. 2 si può scrivere l'uguaglianza

$$v = v_0 + v_1 + \dots + v_\gamma. \tag{7}$$

4. Ci proponiamo da ultimo di far vedere che (qualunque sia $i = 0, 1, \dots, \gamma$) è

$$v_i = u_i,$$

dopo di che l'uguaglianza (4) da stabilire seguirà senz'altro dalle (5), (7).

Rileviamo, in questo intento, che nell'ipotesi che valgano le (6) i due punti $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$ sono certo distinti fra loro. Infatti (n. 3) la retta $\overline{A}_i\overline{B}_i^*$ passa per il punto P, la retta $\overline{B}_i\overline{B}_i^*$ è incidente allo spazio Θ_i e P non giace su questo spazio; dunque, se fosse $\overline{A}_i = \overline{B}_i$, dovrebbe il punto $\overline{A}_i$ stare nello spazio fisso $\mathfrak{Q}_i$ congiungente P con Θ_i, e quindi esso non potrebbe — come invece deve — tendere al punto C_i (che contemporaneamente appartiene a $\mathfrak{F}_{i-1}$ ed a $\mathfrak{C}$).

Quando $x_{\gamma-i+1} \to 1$, $\psi_i \to \psi_{i-1}$ ed i punti $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, muovendosi rispettivamente su $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, tendono con continuità al punto C_i; pertanto la retta $\overline{A}_i\overline{B}_i$, che manifestamente si mantiene appoggiata al suddetto spazio $\mathfrak{Q}_i = (P\Theta_i)$, tende ad una retta — pure incidente a questo spazio — che appartiene al paratingente misto di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ in C_i. In corrispondenza a ciascuna delle v_i eventualità di cui alla fine del n. 3, si ottiene così un punto comune allo spazio fisso $\mathcal{Q}_i$ (di dimensione $i+1$) ed al paratingente misto di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lungo $\mathcal{C}_i$ [il quale, in virtù della (3), ha la dimensione $\nu - i - 1$]. Tale affermazione si inverte con un semplice ragionamento infinitesimale sintetico e si conclude che, effettivamente, v_i uguaglia l'ordine u_i di quel paratingente misto.

5. La formula (2), dianzi stabilita in tutta la sua generalità, nel caso speciale in cui p. es. $\mathcal{B}$ *giace per intero su* $\mathcal{A}$ e quindi è

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}, \quad c = b, \quad \gamma = \beta, \quad k = 1, \quad \eta \geq 0,$$

riducesi alla:

$$t = ab - hb - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{\nu-\alpha-2}). \tag{8}$$

Rammentiamo, nelle ipotesi attuali, i significati dei simboli che compaiono nella (8). Date in S_ν due varietà algebriche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, aventi rispettivamente ordini a e b e dimensioni α e β, e tali che la prima passi per la seconda colla molteplicità h, t è il valore comune degli ordini delle due varietà (fra loro distinte se tali sono $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$) luoghi dei punti di $\mathcal{A}$ o di $\mathcal{B}$ che sono congiunti ad un punto P fisso generico di S_ν da rette che rispettivamente si appoggiano in un punto ulteriore a $\mathcal{B}$ o ad $\mathcal{A}$; u_i (per $i = 0, 1, \ldots, \nu - \alpha - 2$) rappresenta l ordine della $V_{\nu-i-1}$ generata dai coni (generalmente di ordine h e dimensione α) che toccano $\mathcal{A}$ nei singoli punti della varietà sezione di $\mathcal{B}$ con uno spazio lineare generico di dimensione $2\nu - \alpha - \beta - i - 1$.

Se si fa l'ipotesi ulteriormente restrittiva che $\mathcal{A}$ *passi semplicemente per* $\mathcal{B}$, senza coincidere con questa varietà e contenendola in modo generico, u_i è anche manifestamente l'ordine della $V_{\alpha+\beta-\nu+i+1}$ dei punti di contatto degli S_α tangenti alla $\mathcal{A}$ in punti di $\mathcal{B}$, appoggiati in un punto ad un dato S_{i+1}; ossia u_i risulta il *ceto d'immersione di* $\mathcal{B}$ *in* $\mathcal{A}$ *d'ordine* $\nu - \alpha - i - 1$ (1). In questo caso particolare la relazione (8) (nella quale ora va posto $h = 1$) può anche dedursi da una nota formola di SEVERI (2), proiettando le varietà $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dal punto P su di un iperpiano e ricordando (3) che i punti doppi impropri della proiezione di $\mathcal{A}$ provengono dalle corde di $\mathcal{A}$ appoggiate al centro P di proiezione.

La (8) (in cui si faccia $b = a$, $h = 1$) sussiste ancora se $\mathcal{B}$ *coincide colla* $\mathcal{A}$, nel quale caso t rappresenta il *doppio dell'ordine del cono generato dalle corde di* $\mathcal{A}$ *uscenti dal generico punto* P. Il relativo

(1) Ved. F. SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*, « Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino », serie II, t. 52 (1902), p. 61, n. 8.

(2) F. SEVERI, Mem. cit., n. 9.

(3) Cfr. F. SEVERI, Mem. cit., n. 2.

risultato può del pari anche venir stabilito, per varietà $\mathcal{A}$ generali, proiettando $\mathcal{A}$ da P su di un iperpiano e poggiando su di un'altra formula di SEVERI [1].

OSSERVAZIONE. — È appena necessario di avvertire che gli sviluppi precedenti (a differenza di quelli del SEVERI dianzi citati) porgono in pari tempo senz'altro l'*interpretazione geometrico-funzionale di tutti i risultati numerativi* a cui essi ci hanno condotti. Così p. es., limitandoci ad un caso particolare semplicissimo, riferiamoci ad una superficie F di S_5 (d'ordine a), priva di punti singolari, ed al gruppo τ costituito dalle coppie di punti d'appoggio con essa delle corde di F che escono da un punto P generico di S_5; tenuto conto del modo com'è stata stabilita la (8), si ha tosto l'equivalenza

$$\tau \equiv a\lambda - \lambda - (\rho + \sigma),$$

nella quale λ, ρ, σ ordinatamente denotano un gruppo (di a punti) sezione spaziale di F, il gruppo dei punti di una sezione iperpiana $\mathfrak{F}$ di F in cui il piano tangente ad F risulta incidente ad un dato piano π generico di S_5, infine il gruppo dei punti di F aventi il piano tangente appoggiato ad una retta r genericamente assegnata in S_5.

Ora il gruppo ρ appartiene alla serie jacobiana della serie lineare segata su $\mathfrak{F}$ dagli iperpiani di S_5, come si vede supponendo che π stia nell'iperpiano contenente $\mathfrak{F}$; dunque, detto $\varkappa$ un gruppo canonico di $\mathfrak{F}$, è $\rho \equiv 2\lambda + \varkappa$. Il gruppo σ, inoltre, è un gruppo covariante noto del sistema lineare ∞^3 segato su F dagli iperpiani passanti per r, espresso dalla $\sigma \equiv \varphi - \psi + 2\lambda + 4\varkappa$, in cui φ designa un gruppo canonico e ψ un gruppo di SEVERI della F [2]. Risulta pertanto, in definitiva,

$$\tau \equiv (a - 5)\lambda - 5\varkappa - \varphi + \psi \text{ [3]}.$$

(1) F. SEVERI, Mem. cit., n. 3.

(2) Cfr. p. es. B. SEGRE, *Determinazione geometrico-funzionale di gruppi di punti covarianti, relativi ad un sistema lineare* ∞^3 *di curve su di una superficie algebrica*, « Rendic. della R. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, t. 18 $(1933)_2$, p. 445, form. (5).

(3) Se si proietta F da P su di un S_4, a τ corrisponde notoriamente il gruppo dei punti doppi impropri della superficie proiezione; e la formula del testo collima appunto con quella ottenuta per altra via da P. THULLEN, nella Nota *Determinazione della serie di equivalenza individuata dal gruppo dei punti doppi impropri d'una superficie dell'* S_4, « Rendic. del Circ. Mat. di Palermo », t. 59 (1935), p. 256.

[N. B. — Il fascicolo dei « Rendiconti di Palermo » contenente la Nota suddetta è uscito solo nel marzo 1936, durante la stampa del presente lavoro].