Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Max Eger

# Determinazione del gruppo dei punti doppi acquisiti da una forma dell'$S_{2k}$, passante per una data $V_k$

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **15** (1936), n.2, p. 56–61.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_56_0>

# Determinazione del gruppo dei punti doppi acquisiti da una forma dell'$S_{2k}$, passante per una data $V_k$.

Nota di MAX EGER (a Bologna).

**Sunto.** - *Viene determinato funzionalmente il gruppo indicato nel titolo e, incidentalmente, il gruppo dei punti doppi impropri della* $V_k$ *stessa.*

1. Consideriamo nell'$S_{2k}$ una $V_k$ *generica*, appartenente all'$S_{2k}$ e avente singolarità normali ordinarie in questo spazio [1]. È noto [2] che, imponendo ad una forma dell'$S_{2k}$ di contenere questa $V_k$, quella viene di conseguenza ad avere un gruppo, $\delta_k$, di *punti doppi* in punti semplici di $V_k$.

In questa Nota determino funzionalmente il *gruppo* $\delta_k$ e il *gruppo* $\tau_k$ dei punti doppi impropri della $V_k$ stessa, i quali risultano pure doppi per la forma, mediante i gruppi di $V_k$ definibili nel modo seguente. Sia $H_j$ la varietà dei punti di contatto degli $S_k$ tangenti di $V_k$, seganti un generico $S_{k-j}$ in un punto. La $H_j$ ha la dimensione $k-j$ e il suo ordine è il ceto $j$-esimo, $\omega_j$, di $V_k$. Denotiamo con $\sigma_j$ il gruppo sezione di $H_j$ con un $S_{k+j}$ generico, dimodochè:

$$\sigma_j \equiv (S_{k+j}H_j), \quad \text{e} \quad [\sigma_j] = \omega_j.$$

Con queste notazioni, i gruppi $\delta_k$ e $\tau_k$ vengono forniti dalle seguenti equivalenze [3], ove $n$ denota l'ordine della forma:

$$\boxed{\tau_k \equiv \omega_0\sigma_0 - \sum_0^k \sigma_j,} \tag{1}$$

$$\boxed{\delta_k + \tau_k \equiv \sum_0^k (-1)^j (n-1)^{k-j} \sigma_j.} \tag{2}$$

(1) Ipotesi analoghe verranno sempre sottintese in questa Nota ed i resultati qui conseguiti valgono *in generale*, nell'usuale significato della parola.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche, e sopra loro caratteri e singolarità proiettive*, « Memorie della R. Acc. di Torino », t. 52, 1903, p. 61.

(3) Il contenuto numerativo delle (1), (2) risulta dalle formule che trovansi in fine della pag. 76, nella citata Memoria di F. SEVERI. Si badi che si ha $[\tau_k] = 2d(2k, k)$, dove con $d(r, k)$ si denota l'ordine della varietà dei punti doppi impropri di una $V_k$ appartenente ad un $S_r$.

L'equivalenza (1) è implicitamente contenuta in un risultato generale, ottenuto da B. SEGRE con un procedimento del tutto differente da quello che qui seguo ([1]).

Per semplicità di esposizione mi limito dapprima a supporre $k = 2$ ed accenno poi (n. 7) al caso generale.

2. Consideriamo dunque nell'$S_4$ una superficie $F$, d'ordine $\omega_0$, generica, e limitiamoci in primo luogo al caso in cui $F$ è dotata soltanto di *punti doppi impropri*. Denotiamo con $\tau_2$ il gruppo da essi formato, gruppo pensato sull'ente, cioè nel quale ogni punto doppio va considerato una volta su ciascuna delle due falde di $F$ che vi passano, dimodochè, indicando con $d$ il numero dei punti doppi, risulterà $[\tau_2] = 2d$.

Si ha così in corrispondenza ad ogni punto doppio una coppia del gruppo $\tau_2$; essa è *neutra* per le sezioni iperpiane di $F$ e lo è pure sopra una curva qualsiasi passante per entrambi i suoi punti. Per es., i punti d'appoggio delle corde della $F$ uscenti da un generico punto, $O$, dell'$S_4$ costituiscono una curva $\mathfrak{C}$ passante pel gruppo $\tau_2$. Sulla curva $\mathfrak{C}$ le coppie di punti allineati con $O$ formano un'*involuzione*, $\gamma_2^1$, alla quale le $d$ coppie dianzi considerate manifestamente appartengono. Il gruppo $\tau_2$ appare così come formato di *coppie comuni* alla $\gamma_2^1$ e ad ogni serie lineare costituita da sezioni spaziali di $\mathfrak{C}$.

Consideriamo dunque una tale serie, $g^1$, segata dagl'iperpiani per un dato piano, $\pi$, (non contenente $O$), e ricerchiamo le coppie comuni a $\gamma_2^1$ ed a $g^1$. Sia $\xi$ il gruppo da esse formato. Si vede subito che $\xi$ si scinde nel gruppo $\tau_2$ e nel gruppo $\gamma$ della $g^1$ segato dall'iperpiano $O\pi$. Si ha dunque:

$$\xi \equiv \tau_2 + \gamma. \tag{3}$$

D'altro canto questo gruppo si può ottenere nel modo seguente. Si consideri sulla $\mathfrak{C}$ la corrispondenza $T$ che intercede fra un punto $P$ ed i punti del gruppo della $g^1$ passante pel punto $P'$ coniugato di $P$ nella $\gamma_2^1$. La $T$ ammette manifestamente come *punti uniti* tutti e soli i punti di $\xi$ e i punti doppi della $\gamma_2^1$. Poichè questi ultimi (ossia i punti di contatto delle tangenti di $F$ uscenti da $O$) costituiscono (n. 1) un gruppo $\sigma_2$, e $T$ è a valenza zero, ne consegue l'equivalenza

$$\xi + \sigma_2 \equiv \gamma + \gamma^*, \tag{4}$$

in cui $\gamma^*$ denota il gruppo degli omologhi di $P$ nella $T^{-1}$, ossia

([1]) Cfr. B. SEGRE, *Un problema di geometria numerativa*, in questo fascicolo del « Bollettino », p. 49.

il gruppo trasformato di $\gamma$ secondo la $\gamma_2'$, e perciò risulta equivalente a $\gamma$ [ed anzi coincide con esso se si prende per $\gamma$ il gruppo segato dall'iperpiano $O\pi$].

Dalle (3), (4) si ricava immediatamente:

$$\tau_2 \equiv \gamma - \sigma_2. \tag{5}$$

**3.** Per determinare il gruppo $\gamma$, proiettiamo la $F$ da $O$ su di un $S_3$ generico. Si ottiene così una superficie, $\overline{F}$, avente la curva $\overline{\mathfrak{C}}$ proiezione di $\mathfrak{C}$ come *curva doppia nodale*, mentre il gruppo $\gamma$ diviene un gruppo $\overline{\gamma}$ sezione piana di $\overline{\mathfrak{C}}$; quest'ultimo è il gruppo, pensato sull'ente, dei punti doppi della sezione, $\Gamma$, di $\overline{F}$ con un piano. Dal significato dei gruppi $\sigma_j$ introdotti nel n. 1, risulta che i gruppi $\sigma$ di indice 0 ed 1 della $\Gamma$ sono i gruppi $\overline{\sigma}_0$, $\overline{\sigma}_1$, collo *stesso indice* della $\overline{F}$. Poichè una prima polare di $\Gamma$ sega questa curva nel gruppo $\overline{\sigma}_1 + \overline{\gamma}$, risulta su $\Gamma$, e quindi su $\overline{F}$, l'equivalenza:

$$\overline{\sigma}_1 + \overline{\gamma} \equiv (\omega_0 - 1)\overline{\sigma}_0.$$

Risalendo ad $F$ si ha, su questa superficie,

$$\sigma_1 + \gamma \equiv (\omega_0 - 1)\sigma_0, \tag{6}$$

e la (5) diviene così

$$\tau_2 \equiv \omega_0\sigma_0 - \sigma_0 - \sigma_1 - \sigma_2, \tag{7}$$

che è la formula (1) pel caso $k = 2$.

**4.** Si può cercare d'introdurre nella (7) il *numero minimo di elementi proiettivi*, esprimendone taluni mediante *gruppi invarianti* della $F$. A tal uopo osserviamo che $\sigma_1$ è, su di una sezione spaziale di $F$, un gruppo jacobiano della serie lineare delle sezioni iperpiane, e pertanto risulta equivalente a

$$\sigma_1 \equiv 2\sigma_0 + \varkappa_\Gamma, \tag{8}$$

dove $\varkappa_\Gamma$ denota un gruppo canonico di una sezione spaziale di $F$, ossia:

$$\varkappa_\Gamma \equiv (\Gamma, \Gamma + \mathcal{K}) \equiv \sigma_0 + (\Gamma\mathcal{K}), \tag{9}$$

$\mathcal{K}$ essendo una curva canonica (impura) di $F$. — $\sigma_2$, a sua volta, è costituito dai punti-base con tangente fissa per reti estratte dal sistema $\infty^3$ delle sezioni iperpiane per $O$. Esso è dunque notoriamente fornito dall'equivalenza [1]:

$$\sigma_2 \equiv 2\sigma_0 + 4\varkappa_\Gamma + \varphi - \psi, \tag{10}$$

[1] Cfr. B. SEGRE, *Determinazione geometrico-funzionale*, ecc.. Nota III. « Rendic. dell' Acc. Naz. dei Lincei », $(1933)_2$, p. 446, form. (5).

in cui ordinatamente $\varphi$ e $\psi$ denotano un gruppo della serie canonica ed un gruppo della serie di SEVERI di $F$.

In base alle (8), (9), (10), l'equivalenza (7) diviene:

$$(11) \qquad \tau_2 \equiv (\omega_0 - 10)\sigma_0 - 5(\Gamma\mathcal{K}) - \varphi + \psi,$$

dove figurano soltanto, come elementi proiettivi, una sezione spaziale $\Gamma$ ed il suo gruppo caratteristico $\sigma_0$ [1].

OSSERVAZIONE. — Un lieve cambiamento nel ragionamento esposto permette di estendere la validità della (11) al caso in cui la $F$ abbia singolarità improprie ordinarie *d'ordine di molteplicità $k$ maggiore di due,* purchè nel gruppo $\tau_2$ un punto siffatto si computi $k-1$ *volte su ciascuna delle $k$ falde di $F$ che lo contengono.*

5. Passiamo ora a determinare il gruppo $\delta_2$ dei *punti doppi acquisiti in punti semplici* della $F$ da una $V_3^n$ passante per essa.

All'uopo denotiamo con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ rispettivamente, le curve intersezioni della $F$ colle prime polari di due punti generici $O$ ed $O_1$, rispetto alla $V_3^n$. Si ha ovviamente

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \equiv (n-1)\Gamma, \qquad (\Gamma \equiv \textit{sezione spaziale di } F)$$

e pertanto,

$$(12) \qquad (\mathcal{C}\mathcal{C}_1) \equiv (\mathcal{C}^2) \equiv (n-1)\sigma_0.$$

Le curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_1$ passano semplicemente pel gruppo $\delta_2 + \tau_2$, e sia $M$ un punto del gruppo residuo, $\mu$, di $(\mathcal{C}^2)$. In $M$, semplice tanto per $F$ che per $V_3^n$, l'iperpiano tangente a quest'ultima contiene la retta $r \equiv OO_1$ e quindi il piano tangente alla $F$ sega la $r$ in un punto. Ne segue che $M$ appartiene alla curva $H_1$ luogo dei punti di contatto dei piani tangenti di $F$ che incontrano la $r$, ossia alla curva jacobiana della rete delle sezioni di $F$ con spazi per $r$. Viceversa si vede agevolmente che il gruppo $(\mathcal{C}H_1)$ si decompone nel gruppo $\mu$ dianzi considerato e nel gruppo $\sigma_2$ dei punti di $F$ il cui piano tangente passa per $O$. Si ha dunque:

$$(13) \qquad (\mathcal{C}^2) \equiv \delta_2 + \tau_2 + (\mathcal{C}H_1) - \sigma_2,$$

ed inoltre, ricordando (n. 1) il significato di $\sigma_1$:

$$(14) \qquad (\mathcal{C}H_1) \equiv (n-1)(\Gamma H_1) \equiv (n-1)\sigma_1.$$

[1] L'equivalenza (11) è già stata ottenuta da P. THULLEN nel fascicolo 2, (1935), dei « Rendic. del Circolo Mat. di Palermo », e, contemporaneamente, da B. SEGRE nel n. 5 della Nota qui citata al n. 1.

Dalle (12), (13), (14), si trae

$$\delta_2 + \tau_2 \equiv (n-1)^2\sigma_0 - (n-1)\sigma_1 + \sigma_2 \tag{15}$$

che è appunto la formula (2) per $k = 2$.

**6.** Si può ora procedere in modo analogo al n. 4 per giungere all'espressione del gruppo (15) mediante elementi invarianti di $F$, e si ottiene agevolmente, in base alle (8), (9), (10),

$$\delta_2 + \tau_2 \equiv (n-1)^2\sigma_0 - (n-1)[3\sigma_0 + (\Gamma\mathcal{H})] + 6\sigma_0 + 4(\Gamma\mathcal{H}) + \varphi - \psi. \tag{16}$$

L'interpretazione numerativa delle (11), (16) non presenta difficoltà, e, introducendo i soliti caratteri invarianti ($\Omega =$ inv. di ENRIQUES–CASTELNUOVO, $I =$ inv. di ZEUTHEN–SEGRE, $p =$ genere di una sezione spaziale della $F$) conduce alle uguaglianze:

$$[\tau_2] = (\omega_0 - 5)\omega_0 - 10p - \Omega + I + 15, \tag{17}$$

$$[\delta_2] = (n-1)^2\omega_0 - 2(n-1)(\omega_0 + p - 1) + 18p - (\omega_0 - 7)\omega_0 + \\ + 2\Omega - 2I - 28. \tag{18}$$

**7.** Passiamo ad accennare rapidamente al caso generale contemplato nel n. 1, ed occupiamoci dapprima della (1), che stabiliremo col metodo d'induzione completa.

Procedendo in modo analogo a quello seguito nel n. 2, si ottiene sulla $V_k$ una curva, $\mathcal{A}$, luogo dei punti d'appoggio delle corde passanti per un generico punto $O$ dell'$S_{2k}$. Si dimostra, come estensione della (5), che su $\mathcal{A}$ sussiste l'equivalenza:

$$\tau_k + \sigma_k \equiv \gamma_k, \tag{19}$$

in cui $\gamma_k$ denota un gruppo sezione iperpiana della $\mathcal{A}$. Proiettando la $V_k$ da $O$ su di un $S_{2k-1}$, si ottiene (con notazioni simili a quelle introdotte nel n. 3) una $\overline{V}_k$, di cui $\overline{\mathcal{A}}$ è *curva doppia*. Segando la $\overline{V}_k$ con un $S_{2k-2}$ dell'$S_{2k-1}$ si ha una $\overline{V}_{k-1}$, avente per punti doppi impropri i punti del gruppo $\overline{\gamma}_k$. Ammessa (com'è lecito) la (1) per le varietà a $(k-1)$ dimensioni, si ha su $\overline{V}_k$:

$$\overline{\gamma}_k \equiv \omega_0\overline{\sigma}_0 - \sum_0^{k-1}\overline{\sigma}_j,$$

equivalenza che dà sulla $V_k$:

$$\gamma_k \equiv \omega_0\sigma_0 - \sum_0^{k-1}\sigma_j. \tag{20}$$

Dalle (19), (20), segue subito la formula (1) da dimostrare.

Sia ora, in $S_{2k}$, una forma d'ordine $n$, passante per $V_k$, e chiamiamo con $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ecc., le intersezioni della $V_k$ colle prime polari dei generici punti, $O_1$, $O_2$, ecc., rispetto alla forma considerata. Si ha:

$$\mathfrak{C}_1 \equiv \mathfrak{C}_2 \equiv \ldots \equiv \mathfrak{C} \equiv (n-1)\Pi, \tag{21}$$

denotando con $\Pi$ una sezione iperpiana di $V_k$.

Le varietà $\mathfrak{C}_i$ passano tutte pel gruppo $\delta_k + \tau_k$. Ne segue che $k$ generiche di esse $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots$ $\mathfrak{C}_k$, hanno per intersezione il gruppo:

$$(\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_k) \equiv (\mathfrak{C}^k) \equiv \delta_k + \tau_k + \mu_1. \tag{22}$$

In un punto $M$ di $\mu_1$ l'$S_k$ tangente alla $V_k$ risulta incidente all'$S_{k-1}$ determinato dai $k$ punti $O_1 O_2 \ldots O_k$. $\mu_1$ giace dunque sulla varietà jacobiana $H_1$ relativa a questo $S_{k-1}$. Si vede poi che risulta:

$$(H_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{k-1}) \equiv (H_1 \mathfrak{C}^{k-1}) \equiv \mu_1 + \mu_2,$$

dove $\mu_2$ è un gruppo di punti di $V_k$ in cui l'$S_k$ tangente risulta incidente all'$S_{k-2}$ determinato da $O_1, \ldots O_{k-1}$. Così proseguendo si ottengono le equivalenze:

$$(H_j \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{k-j}) \equiv (H_j \mathfrak{C}^{k-j}) \equiv \mu_j + \mu_{j+1}, \tag{23}$$

da $j = 1$ fino a $j = k$; in quest'ultimo caso manca il gruppo $\mu_{k+1}$ e la (23) si riduce a $(H_k) \equiv \mu_k \equiv \sigma_k$.

Sommando a membro a membro le (22), (23), alternativamente moltiplicate per $+1$ e $-1$, si ricava:

$$(\mathfrak{C}^k) - (H_1 \mathfrak{C}^{k-1}) + \ldots + (-1)^k \sigma_k \equiv \delta_k + \tau_k. \tag{24}$$

Se si tiene conto della (21) si ha:

$$(H_j \mathfrak{C}^{k-j}) \equiv (n-1)^{k-j} (H_j \Pi^{k-j}) \equiv (n-1)^{k-j} \sigma_j,$$

e con ciò la (24) si riduce appunto alla (2).