BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

# Equazioni reciproche in senso generale

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **15** (1936), n.2, p. 61–64.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

## Equazioni reciproche in senso generale.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

**Sunto.** - *Si stabilisce la forma assunta da una equazione reciproca in senso generale di grado* $k \cdot 2^n$, *le cui successive risolventi di gradi* $k \cdot 2^{n-1}$, $k \cdot 2^{n-2}, \ldots, k \cdot 2$, *sono pure reciproche in senso generale.*

**Indicheremo in questo articolo la forma assunta da quelle equazioni reciproche in senso generale [1], di grado $k \cdot 2^n$, le cui risol-**

(1) Vedi DE LONGCHAMPS, « Journal de Math. », vol. 6°, pag. 265; e G. CANDIDO, « Periodico di Matem. », vol. XXI, fasc. II, 1905.

venti di grado $k \cdot 2^{n-1}$, $k \cdot 2^{n-2}$, $k \cdot 2^{n-3}, \ldots$, $k \cdot 2$ sono reciproche in senso generale [1].

È notevole questa classe di equazioni reciproche in senso generale, perchè la risoluzione di esse, una volta conosciute le radici dell'equazione di grado $k$, dipende dalla risoluzione dell'equazione ricorrente

$$x^2_{i+1} - x_i x_{i+1} + \lambda_{i+1} = 0. \tag{a}$$

come meglio in seguito sarà precisato.

**1.** Stabiliamo una premessa. Poniamo

$$g_{i,h} = \Sigma \binom{k \cdot 2^{n-1} - i - \sum_{j=2}^{n} h_j}{h_1} \cdot \binom{k \cdot 2^{n-2} - i - \sum_{j=3}^{n} h_j}{h_2} \ldots \tag{1}$$

$$\ldots \binom{k - i}{h_n} \lambda_n^{h_1} \cdot \lambda_{n-1}^{h_2} \ldots \lambda_1^{h_n},$$

essendo la $\Sigma$ estesa a tutti i termini che da quello generico indicato si ottengono, quando ad $h_1, h_2, \ldots, h_n$ si sostituisce una qualunque delle $\binom{n+h-1}{h}$ soluzioni intere, positive o nulle dell'equazione

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = h, \tag{2}$$

esclusi però quei termini in cui vi è uno dei coefficienti binomiali almeno, con il numero indicante la classe maggiore del corrispondente numero degli elementi.

**2.** Le equazioni della forma

$$\sum_{r=0}^{r=k \cdot 2^{n-1}} \left( \sum_{i=0}^{r} g_{2i,\, r-i}\, a_{2i} \right) \cdot x^{k \cdot 2^n - 2r} + \tag{3}$$

$$+ \sum_{r=0}^{r=k \cdot 2^{n-1}-1} \left( \sum_{i=0}^{r} g_{2i+1,\, r-i}\, a_{2i+1} \right) x^{k \cdot 2^n - 2r - 1} = 0$$

e le successive risolventi aventi i gradi $k \cdot 2^{n-1}$, $k \cdot 2^{n-2}, \ldots$, $k \cdot 2$ sono reciproche in senso generale ed hanno rispettivamente i moduli di reciprocità $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_1$.

[1] Casi particolari di questa questione sono stati studiati da G. CANDIDO, *Le equazioni bireciproche*, « Periodico di Matem. », fasc. IV, 1909; ID., *Correzioni ed aggiunte ad alcune note precedenti*, « Periodico di Mat. », fasc. I. 1915: e da L. TOSCANO, *Le equazioni bicontrareciproche*, « Giorn. del Battaglini », 1927.

Inoltre, se l'ultima risolvente di grado $k$, $\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i} = 0$, ammette le $k$ radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, quelle della (3) si ottengono determinando il valore dell'incognita generica di tutte le equazioni ricorrenti che si ottengono dalla (a), assumendo come condizioni iniziali

$$x_0 = \alpha_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

ed essendo le $\lambda_i$ delle quantità date ([1]).

Questa seconda parte del teorema è evidente, infatti se $\alpha_s$ è una delle $k$ radici della $\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i} = 0$, le

$$x_1 + \frac{\lambda_1}{x_1} = \alpha_s, \quad x_2 + \frac{\lambda_2}{x_2} = x_1, \ldots, \quad x_{i+1} + \frac{\lambda_{i+1}}{x_{i+1}} = x_i, \ldots$$

danno appunto luogo alla (a).

**3.** Dimostriamo la prima parte del teorema con il metodo d'induzione completa, cominciando col rilevare che l'equazione reciproca in senso generale di grado $k \cdot 2$ che si ottiene dalla $\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i} = 0$, cambiandovi $x$ in $x + \frac{\lambda_1}{x}$ ha la forma della (3).

Supponiamo ora che la (3) sia vera quando si cambi in essa $n$ in $n-1$ e indichiamo con $g'_{i,h}$ ciò che diventa $g_{i,h}$ dopo il detto cambiamento, la (3) allora può scriversi

$$\sum_{r=0}^{r=k\cdot 2^{n-2}} \left( \sum_{i=0}^{r} g'_{2i,\, r-i}\, a_{2i} \right) x^{k\cdot 2^{n-1} - 2r} +$$
$$+ \sum_{r=0}^{k\cdot 2^{n-2}-1} \left( \sum_{i=0}^{r} g'_{2i+1,\, r-i}\, a_{2i+1} \right) x^{k\cdot 2^{n-1} - 2r - 1} = 0.$$

Mettendo in quest'ultima al posto di $x$, $x + \frac{\lambda_n}{x} = \frac{x^2 + \lambda_n}{x}$, si ricavano i seguenti coefficienti di $x^{k\cdot 2^n - 2r}$, $x^{k\cdot 2^n - 2r - 1}$

$$\sum_{i=0}^{i=r} \lambda_n^{r-i} \binom{k\cdot 2^{n-1} - 2i}{r-i} \sum_{j=0}^{i} g'_{2j,\, i-j}\, a_{2j},$$
$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_n^{r-i} \binom{k\cdot 2^{n-1} - 2i - 1}{r-i} \sum_{j=0}^{i} g'_{2j+1,\, i-j}\, a_{2j+1},$$

che, ponendo in evidenza $a_0, a_2, \ldots, a_{2r}$ ed $a_1, a_3, \ldots, a_{2r+1}$, rispet-

([1]) Nell'« Int. des Mathém. », tomo II, 1895, è domandato il termine generale della (a) per $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{i+1} = \pm 1$. La risposta è riportata alle pagg. 225-26 del tomo IV.

tivamente diventano

$$\sum_{j=0}^{r} a_{2j} \sum_{i=j}^{r} \binom{k \cdot 2^{n-1} - 2i}{r-i} g'_{2j,i-j} \cdot \lambda_n^{r-i},$$

$$\sum_{j=0}^{r} a_{2j+1} \sum_{i=j}^{r} \binom{k \cdot 2^{n-1} - 2i - 1}{r-i} g'_{2j+1,i-j} \lambda_n^{r-i}.$$

Tenendo presenti la (1) e il significato stabilito di $g'_{i,h}$, si riconosce che questi due ultimi coefficienti sono dello stesso tipo dei corrispondenti coefficienti della (3). Quindi il teorema è vero in generale.

**4.** Casi particolari della (3) notevoli, si hanno per

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = \lambda,$$

e per $\lambda_i = \pm 1$.

I coefficienti dei termini coniugati di quelli in $x^{k \cdot 2^n - 2r}$ e $x^{k \cdot 2^n - 2r - 1}$, della (3) nel caso generale, si ottengono cambiando rispettivamente in quelli di quest'ultimi, $2r$ e $2r+1$ in $k \cdot 2^n - 2r$ e $k \cdot 2^n - 2r - 1$.

**5.** Dico ora che il valore dell'incognita generica della

$$x^2_{i+1} - x_i \cdot x_{i+1} + \lambda_{i+1} = 0$$

con la condizione iniziale

$$x_0 = \alpha_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

e con $\lambda_i$ quantità assegnate, ponendo $\lambda_m = l^2_m$, è dato dalla

$$x_{i+1} = \frac{\alpha_s \pm \sqrt{(\alpha_s + 2l_1) \cdot (\alpha_s - 2l_1)}}{2^{i+1}} \tag{4}$$

$$\frac{\pm \sqrt{(\alpha_s \pm \sqrt{(\alpha_s + 2l_1) \cdot (\alpha_s - 2l_1)} + 2^2 l_2)(\alpha_s \pm \sqrt{(\alpha_s + 2l_1) \cdot (\alpha_s - 2l_1)} - 2^2 l_2) \pm \ldots}}{2^{i+1}}$$

in cui il termine $r^{mo}$ del numeratore è la radice quadrata preceduta dal doppio segno del prodotto della somma per la differenza, di tutta l'espressione formata dai primi $r-1$ termini del numeratore stesso con $2^{r-1} l_{r-1}$, essendo in tutto $i+2$ i termini del numeratore.

Infatti dalla (a) si ricava

$$x_{i+1} = \frac{2^i x_i \pm \sqrt{(2^i x_i + 2^{i+1} l_{i+1}) \cdot (2^i x_i - 2^{i+1} \cdot l_{i+1})}}{2^{i+1}}$$

e quindi si riconosce che se il valore di $x_i$ ha la forma data dalla (4), sostituendone il valore nella precedente, questa coincide con la (4) stessa, che, essendo vera per $i = 0$, è vera in generale.