Bollettino Unione Matematica Italiana

Enzo Martinelli

Sui coni proiettanti da un punto di una superficie di Jordan i rimanenti punti di essa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 66–71.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_66_0>

Sui coni proiettanti da un punto di una superficie di Jordan i rimanenti punti di essa.

Nota di ENZO MARTINELLI (a Roma).

Sunto. - *Si stabilisce che tra i coni proiettanti da un punto di un pezzo non piano di superficie di* JORDAN *i rimanenti punti di esso, esistono sempre dei coni solidi. Si fa inoltre un' applicazione di tale risultato.*

1. In questa Nota si proverà che:

Sopra un pezzo σ, non piano, di superficie semplice di JORDAN, *esiste sempre un punto X, tale che, proiettando da X o da un qualunque altro punto di un intorno di esso su σ, i punti di σ, si ottiene un cono solido* [1].

Si giungerà (nn. 2, 3, 4) alla prova dell' asserto, ammettendo la validità della generalizzazione allo spazio ordinario di un risultato ottenuto dall' ANTOINE [2] per il piano, validità che sembra presumibile. Precisamente si ammetterà che:

« Dato un omeomorfismo fra due pezzi di superficie semplice di JORDAN immersi in spazi ordinari, esso possa (almeno in parte) considerarsi come subordinato da un omeomorfismo fra due intorni spaziali comprendenti rispettivamente i due pezzi di superficie (o porzioni bidimensionali di esse) ».

Tale proposizione è in stretto legame col teorema generalizzato di SCHOENFLIES [3], che è ammesso da alcuni Autori, benchè tuttora non se ne conosca una dimostrazione.

Al n. 5, si farà poi un' applicazione del risultato dapprima enunciato, completando — secondo quanto si era avvertito in una

[1] Cioè: contenente qualche cono circolare solido.

[2] Cfr. L. ANTOINE, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*, « Journal de Math. » (1921), p. 221.

[3] Cfr., p. es., F. SEVERI, *Topologia*, Buenos Aires (1931), n. 22, p. 35; n. 51, p. 66.

precedente Nota [1] — una proposizione di geometria differenziale degli insiemi, ivi stabilita.

2. Dimostriamo intanto che:

I) ***Esistono su σ due punti*** X, Y, ***dei quali il secondo non sul contorno, tali che il segmento*** XY ***incontri σ soltanto negli estremi.***

Sia c il contorno di σ, ed M, N siano due punti di σ fuori di c. Il segmento MN ha in comune con σ un insieme di punti I, *serrato* [2]. Due casi possono darsi: 1) che esista almeno un punto P di I, non appartenente a c, e tale che in un intorno destro, o sinistro, di P (sul segmento MN), non cadano punti di I; 2) che M, N siano punti d'accumulazione dell'insieme I, ed ogni altro punto di I, non appartenente a c, sia d'accumulazione *d'ambedue le parti* per punti di I.

Nel caso 1) si prenda come punto Y il punto P, e come punto X il *primo* punto di I alla destra, o alla sinistra, di P; si soddisfa in tal modo alle condizioni richieste.

Nel caso 2), proviamo intanto che esistono sempre segmenti MM_1 porzioni del segmento MN, e costituiti esclusivamente da punti di I. Invero, se così non fosse, esisterebbero in un intorno qualunque di M, punti del segmento MN non appartenenti ad I, e quindi altresì segmenti porzioni di MN, non appartenenti ad I, ad eccezione dei relativi estremi, i quali apparterrebbero effettivamente ad I. Ora tali estremi non potrebbero essere che punti di c, chè non saremmo altrimenti nel caso 2). Dunque M risulterebbe d'accumulazione per punti di c, e quindi anch'esso punto di c, contro il supposto iniziale.

Sia N' l'estremo superiore (nel verso MN sul segmento omonimo) dei punti M_1, tali che i segmenti MM_1 soddisfino alla condizione ora detta e non contengano punti di c. È chiaro che il segmento MN' (estremo N' escluso) risulta luogo di punti di σ, non appartenenti a c. Si osservi invece che l'estremo N', se non coincide con N, appartiene a c; altrimenti potendosi ripetere per il segmento $N'N$ analogo ragionamento a quello testè fatto per il segmento MN, non sarebbe N' l'estremo superiore dei punti M_1.

Orbene, se per *ogni* segmento MN, con M, N su σ ma non su c, si ha il caso 2), e quindi esiste entro MN un segmento MN' di cui sopra, mostreremo che σ sta tutto in un piano. Si supponga, per assurdo, che esistano quattro punti non complanari Q, R, S, T,

[1] E. MARTINELLI, *Sugli insiemi bidimensionali di punti dello spazio fra loro omografici*, questo « Bollettino », 1936, fasc. 1, p. 20, n. 1.

[2] Cioè: contenente il proprio insieme derivato.

appartenenti a σ (e non a c). Dato che i segmenti QR, ST si trovano nel caso 2), esisteranno due segmenti QR', ST', rispettivamente porzioni di quelli, godenti delle stesse proprietà specificate per il segmento MN' entro MN. Siano QR'', ST'', segmenti contenuti in QR', ST'; e $\overline{Q}$, $\overline{S}$ punti variabili in QR'', ST''. Giacchè altresì ogni segmento $\overline{Q}\,\overline{S}$ si trova nel caso 2), può considerarsi, entro ciascuno di questi, il segmento $\overline{Q}\,\overline{S}'$ (con ormai ovvio significato delle lettere). La lunghezza di $\overline{Q}\,\overline{S}'$ risulta funzione, $\varphi(\overline{Q}, \overline{S})$, uniforme della coppia di punti $\overline{Q}$, $\overline{S}$, al variare di questi rispettivamente entro QR'' ed ST''. È facile persuadersi che l'estremo inferiore della funzione $\varphi(\overline{Q}, \overline{S})$ non può essero zero. Altrimenti, in base al teorema di WEIERSTRASS, esisterebbero due punti $\overline{Q}_0$, $\overline{S}_0$ (appartenenti rispettivamente ai segmenti QR'', ST''), tali che, per $\overline{Q}$, $\overline{S}$ in intorni comunque piccoli di $\overline{Q}_0$, $\overline{S}_0$, le lunghezze dei segmenti $\overline{Q}\,\overline{S}'$ risulterebbero comunque piccole. Ne seguirebbe che il punto $\overline{Q}_0$ sarebbe d'accumulazione per punti $\overline{S}'$, cioè per punti di c (chè i punti $\overline{S}'$, se non coincidono con S, appartengono a c). Allora $\overline{Q}_0$ risulterebbe anch'esso punto di c, mentre non è tale alcun punto di QR''. Dunque l'estremo inferiore delle lunghezze dei segmenti $\overline{Q}\,\overline{S}'$ è > 0. Da ciò segue facilmente — tenuto conto della non complanarità di Q, R, S, T — che i segmenti $\overline{Q}\,\overline{S}'$, costituiti da punti di σ, descrivono al variare di $\overline{Q}$, $\overline{S}$ entro QR'' ed ST'', una porzione tridimensionale dello spazio; mentre σ è un pezzo di superficie semplice di JORDAN, e come tale — in base ad un noto teorema di BROUWER-LEBESGUE [1] — non può riempire alcuna 3-cella dello spazio. Dunque σ sta tutto in un piano.

D'altronde si è escluso da principio che σ sia un pezzo di piano, quindi devesi concludere che esiste almeno un segmento MN, per cui si abbia il caso 1). Resta così dimostrata la proposizione I).

3. Ciò posto, sia — sopra un piano π — un cerchio γ omeomorfo a σ. Valendosi della proposizione ammessa da principio, tale omeomorfismo può considerarsi subordinato da un omeomorfismo Ω tra due intorni spaziali di σ e γ [2]. Possiamo supporre che il seg-

[1] Cfr., p. es., F. SEVERI, *Topologia*, già cit., p. 39.

[2] La proposizione ammessa da principio ci permette in realtà di considerare l'omeomorfismo Ω fra due intorni spaziali eventualmente comprendenti soltanto porzioni bidimensionali $\bar{\sigma}$ e $\bar{\gamma}$ di σ e γ. È chiaro che, in tal caso, ci si potrà limitare alla considerazione di tali porzioni $\bar{\sigma}$ e $\bar{\gamma}$, dopo di aver dimostrato la proposizione I) per $\bar{\sigma}$; ciò che è possibile a meno che $\bar{\sigma}$ non risulti un pezzo di piano. In quest'ultima ipotesi però il teorema che c'interessa è ben evidente!

mento XY risulti interno all'intorno spaziale di σ [1]; così pure ogni elemento geometrico in seguito considerato si dovrà e si potrà sottintendere preso negli intorni spaziati tra cui sussiste l'omeomorfismo Ω.

L'omeomorfismo Ω farà corrispondere al segmento $\rho \equiv XY$, una linea semplice di JORDAN, ρ', incontrante γ *soltanto* negli estremi X', Y' (corrispondenti di X, Y). Dato che Y' non è sul contorno di γ (non essendo Y sul contorno di σ), può considerarsi un cerchio Γ di centro Y', contenuto in γ, che lasci all'esterno il punto X'. Sia Σ il pezzo di σ, corrispondente a Γ mercè Ω. Possiamo ora dimostrare che

II) *Può determinarsi un pezzo di superficie* $\overline{\Lambda}$ *tale che* $\Lambda = \overline{\Lambda} + \Sigma$ *costituisca una superficie semplice chiusa di* JORDAN, *a cui il segmento* ρ *risulti tutto esterno, eccezion fatta per il punto* Y *che sta su* Σ.

Si osservi che Y' non può essere d'accumulazione per punti di ρ', situati sia da una banda, β_1, che dall'altra β_2, di π. Altrimenti, se ne dedurrebbe immediatamente che ρ' incontrerebbe Γ anche fuori di Y'. Dunque Y' sarà d'accumulazione per punti di ρ' situati da una determinata banda di π, p. es. β_1. Ciò posto, si considerino esclusivamente gli eventuali punti di ρ' situati dall'altra banda, β_2, di π; e per ogni punto U di Γ, l'estremo inferiore delle distanze di U da questi punti. Tale estremo inferiore è funzione, $f(U)$, uniforme di U. Dico che l'estremo inferiore di $f(U)$, per U variabile in Γ, è un segmento $h > 0$. Infatti, supposto per assurdo $h = 0$, e detto U_0 un punto di WEIERSTRASS entro Γ relativo all'estremo inferiore, si dedurrebbe che U_0 è d'accumulazione per punti di ρ' situati in β_2. Ma ciò è impossibile, dato che U_0, risultando così punto di ρ', coinciderebbe con Y', che d'altronde si è supposto non essere d'accumulazione per punti di ρ', situati in β_2.

Si consideri allora in β_2, una superficie cilindrica chiusa $\Delta = \overline{\Delta} + \Gamma$, avente una base coincidente con Γ, e altezza $< h$. All'infuori del punto Y', che sta su Γ, ogni altro punto di ρ' risulta esterno alla superficie chiusa Δ. L'omeomorfismo Ω farà pertanto corrispondere a Δ, una superficie semplice chiusa di JORDAN $\Lambda = \overline{\Lambda} + \Sigma$, soddisfacente alle condizioni espresse in II).

4. Tutto ciò stabilito, sia finalmente g l'estremo inferiore delle distanze di un punto V, variabile su ρ, dai punti di $\overline{\Lambda}$. Esso è

[1] In caso contrario, basterà sostituire ad XY un'altro segmento, determinato in base alla proposizione I) applicata ad una porzione convenientemente ristretta di σ.

una funzione, $g(V)$, uniforme di V. Con un ragionamento simile ad altro già applicato, si deduce — tenendo presente che ρ non incontra $\overline{\Lambda}$ — che l'estremo inferiore di $g(V)$ per V variabile in ρ, è un segmento $r > 0$. Pertanto, può considerarsi la superficie chiusa e convessa Θ, ottenuta dalla superficie cilindrica di asse ρ e raggio $r' < r$, chiudendola con l'aggiunta di due superficie emisferiche di centri in X e Y, e raggio r'. Da quanto si è detto risulta che, sopra e all'interno di Θ non cadono punti di $\overline{\Lambda}$.

Ciò posto, sia $E_{Y'}$ una sfera di centro Y' (su Γ), i cui punti interni corrispondano mediante l'omeomorfismo Ω a punti interni alla sfera E_Y, di centro Y e raggio r'. Sia poi Φ una sfera tutta interna ad $E_{Y'}$ ed alla superficie chiusa Δ. Entro la sfera E_Y, esiste una sfera Ψ costituita da punti corrispondenti mercè Ω a punti di Φ, quindi costituita da punti *interni* a Λ.

Si proiettino ora da X i punti della sfera Ψ: si ottiene così un *cono circolare solido*, costituito da segmenti di retta, tutti interni a Θ, i quali uniscono il punto X, esterno a Λ, con i punti di Ψ, interni a Λ. Dunque *ognuno* di quei segmenti deve bucare la superficie chiusa $\Lambda = \overline{\Lambda} + \Sigma$ (in base al classico teorema di Jordan), e quindi bucherà Σ, poichè il pezzo $\overline{\Lambda}$ è tutto esterno a Θ. Del cono proiettante da X i punti di σ, fa così parte il cono circolare solido determinato.

È chiaro inoltre che per ogni punto $\overline{X}$ dell'intorno di X su σ, sussiste analogo risultato, purchè l'intorno sia così piccolo da essere contenuto all'interno di Θ. Il teorema enunciato al n. 1, risulta pertanto completamente dimostrato.

5. Per conseguire la proposizione di cui ci siamo occupati nella Nota citata al n. 1 ([1]), si è ivi fatto uso di un'ipotesi supplettiva *a)*, la quale è esclusivamente servita ([2]) per stabilire l'esistenza di un punto A di un insieme di punti s (costituito da uno o più pezzi di superficie semplice di Jordan) e di un intorno I_A di A su s, tale che proiettando da A, o da un qualunque altro punto di I_A, i punti di s, si ottenga un cono solido.

Orbene, supponiamo in un primo tempo che s contenga qualche pezzo *piano*, σ, di superficie di Jordan. Allora possono darsi due eventualità: o s sta tutto in un piano, e allora l'ipotesi *a)* non occorre ([3]); oppur no. In questa ultima eventualità può prendersi A in un punto qualunque di s fuori del piano di σ, giacchè

([1]) E. Martinelli, *Sugli insiemi bidimensionali ecc.*, già cit..
([2]) Cfr. la Nota sopra cit., n. 3.
([3]) Cfr. la Nota sopra cit., n. 2.

il cono proiettante s da un punto esterno al piano di σ, risulta ovviamente solido.

Altrimenti s conterrà qualche pezzo *non piano* di superficie di JORDAN. In tal caso, l'esistenza di un punto A e relativo intorno I_A, soddisfacenti alle condizioni dette, risulta direttamente dal teorema stabilito nei nn. precedenti. Si conclude, in definitiva, che la proposizione di cui alla Nota citata, sussiste anche allorchè si prescinda dall'ipotesi *a)*.