Bollettino Unione Matematica Italiana

Osvaldo Zanaboni

Il problema della funzione delle tensioni in un sistema spaziale isotropo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 71–76.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Il problema della funzione delle tensioni in un sistema spaziale isotropo.

Nota di OSVALDO ZANABONI (a Bologna).

Sunto. - *Si mostra come, mediante l'introduzione di tre funzioni biarmoniche arbitrarie, si possano esprimere le tensioni in un sistema spaziale isotropo, in forma tale da rendere identicamente soddisfatte sia le equazioni di congruenza. sia le equazioni indefinite dell'equilibrio.*

La funzione di AIRY *per i sistemi piani, può perciò considerarsi come un caso particolare di quello quì trattato.*

1. Le note ricerche del CERRUTI (1) e del BURGATTI (2), hanno messo in luce la possibilità di esprimere gli spostamenti dei punti di un solido elastico isotropo, mediante tre funzioni armoniche arbitrarie; e ciò in maniere diverse.

In virtù delle relazioni esistenti tra spostamenti e tensioni, resta perciò acquisito nel modo più generale che lo stato elastico indefinito di un corpo può assegnarsi per mezzo delle tre ricordate funzioni.

Se dal punto di vista generico e concettuale l'argomento è dunque chiuso, nei riguardi applicativi si nota che la dipendenza non semplice tra tensioni e spostamenti, e la riconosciuta possibilità di risolvere il problema in più modi, faranno sì che le soluzioni comode per le une non lo saranno per gli altri, e viceversa.

Sembra dunque giustificata una ricerca apposita per le funzioni delle tensioni.

(1) MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici.* Ed. Hoepli, pagg. 236-237.

(2) BURGATTI, *Sopra due utili forme dell'integrale generale dell'equazione per l'equilibrio dei solidi elastici isotropi.* « Mem. R. Accademia delle Scienze », Bologna, 1926.

Il problema di individuare lo stato di coazione elastica di un solido isotropo, privo di forze di massa, per mezzo di alcune funzioni arbitrarie sottoposte ad una condizione comune poco restrittiva, fu risolto per i sistemi piani dall'AIRY colle note modalità, e trovò pure altre soluzioni in diversi casi particolari (1).

Per contro non mi risulta che si sia raggiunto qualche risultato pratico per il caso più generale di un sistema nello spazio, inquantochè gli Autori che si sono occupati dell'argomento, si sono limitati ad introdurre delle funzioni, in numero di tre, che soddisfano identicamente alle equazioni di CAUCHY, ed a riconoscere che esse devono inoltre soddisfare a sistemi piuttosto complicati di equazioni differenziali (2).

Nella presente Nota si mostrerà invece come si possa in ogni caso fare capo a tre funzioni biarmoniche arbitrarie, e si assegneranno le corrispondenti espressioni delle tensioni.

2. Un sistema spaziale generico privo di forze di massa, è caratterizzato da sei tensioni che devono soddisfare alle equazioni indefinite dell'equilibrio di CAUCHY:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \text{ ecc.} \tag{1}$$

ed alle equazioni di congruenza:

$$(1+\nu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0, \text{ ecc.} \tag{2}$$

$$(1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y \partial z} = 0, \text{ ecc.} \tag{3}$$

$$\Delta\Theta = 0. \tag{4}$$

Dove si è indicato con Δ l'operatore di LAPLACE, con ν l'in-

(1) Ad esempio: per la torsione nei solidi prismatici o di rivoluzione; per la flessione nelle sbarre; per i solidi di rivoluzione soggetti ad una distribuzione delle tensioni simmetrica rispetto all'asse. (Vedi per questi argomenti: TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, pagg. 230, 278, 287, 309).

(2) Il MAXWELL dette nel 1870 (« Edinburgh Roy. Soc. Trans. »), una soluzione delle equazioni di Cauchy: una seconda soluzione fu proposta dal MORERA (« Rendic. Acc. Lincei », 1892). In questo stesso volume il BELTRAMI mostrò come si potessero ricavare altre soluzioni per il problema trattato dai due Autori precedenti.

Il LOVE (*A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 3ª ediz., pagg. 16-17, 85-86, 134) riporta i fatti sopra ricordati, e dà i sistemi di equazioni differenziali cui le funzioni del Maxwell e del Morera debbono soddisfare.

verso del modulo di POISSON, e con Θ la somma delle tensioni normali.

Indicando con Δ^2 l'operatore $\Delta\Delta$, e posto:

$$\Theta = (1 + \nu)\Delta\varphi$$

la (4) stabilisce che la nuova funzione φ è biarmonica, mentre, naturalmente, la $\Delta\varphi$ è semplicemente armonica.

Sostituendo nelle (2), (3) si ricava:

$$(1 + \nu)\Delta\left(\sigma_x + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = 0, \text{ ecc.}$$

$$(1 + \nu)\Delta\left(\tau_{yz} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}\right) = 0, \text{ ecc.}$$

per cui, chiamate con $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sei funzioni armoniche generiche, si ha nel modo più generale:

$$\sigma_x = (\nu - 1)A_1 + \Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \text{ ecc.,} \tag{5}$$

$$\tau_{yz} = (\nu - 1)A_4 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} \text{ ecc..} \tag{6}$$

Per la definizione di Θ risulta inoltre:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \Delta\varphi. \tag{7}$$

Sostituendo le (5), (6) nelle (1), si trova, dopo semplici riduzioni, che le A devono anch'esse soddisfare alle equazioni omogenee di CAUCHY, colla sola condizione, si ripete, che siano tutte armoniche.

Per cose note, le A stesse possono allora esprimersi mediante tre funzioni (vedi nota a pag. 72) che è sempre possibile porre nella forma ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3.

Avuto riguardo alla linearità ed omogeneità delle equazioni indefinite dell'equilibrio, ne deriva che l'espressione più generale delle A per mezzo delle F, deve essere del tipo:

$$A_n = \sum_{i=1}^{3} D_{in}(\Delta F_i), \qquad (n = 1 \div 6) \tag{8}$$

essendosi chiamati genericamente con D_{in} quei qualsiasi operatori differenziali omogenei che, applicati alle funzioni ΔF_i, sono in grado di dare sei funzioni soddisfacenti in modo identico alle equazioni omogenee di CAUCHY.

Applichiamo Δ: siccome esso è commutabile con D_{in}, ne deriva:

$$\Delta A_n = \sum_{i=1}^{3} D_{in}(\Delta^2 F_i) = 0. \qquad (n = 1 \div 6)$$

Prendiamo in considerazione il sistema lineare omogeneo a tre funzioni incognite μ_i:

$$\sum_{i=1}^{3} D_{in}(\mu_i) = 0. \qquad (n = 1 \div 6)$$

Data l'omogeneità di D_{in}, una sua soluzione è certamente $\mu_i = 0$; può tuttavia accadere che esista pure una soluzione non nulla che indicheremo ancora con μ_i.

Nell'un caso, affinchè le A risultino armoniche, si deve avere:

$$(9) \qquad \Delta^2 F_i = 0, \qquad (i = 1 \div 3)$$

mentre nell'altro:

$$(10) \qquad \Delta^2 F_i = \mu_i. \qquad (i = 1 \div 3)$$

Esaminiamo quest'ultima possibilità.

Se $\overline{F}_i$ è la soluzione generale di (9), ed F_{oi} è una soluzione particolare di (10), quest'ultima è risolta da $\overline{F}_i + F_{oi}$.

Di conseguenza $\overline{F}_i + F_{oi}$ è la funzione più generale che rende armoniche le A.

D'altra parte, per cose note, lo stesso risultato non può raggiungersi che con $\overline{F}_i + \mu_i$: di conseguenza F_{oi} e μ_i devono coincidere.

Senza intaccare la generalità, si può dunque affermare che le F_i devono unicamente soddisfare alla (9); vale a dire ad una relazione indipendente da D_{in}, il che è quanto dire dalla soluzione che si è in facoltà di prescegliere per le equazioni di CAUCHY.

Tutta la questione è quindi ricondotta ad un argomento che ha ricevuto da tempo la più ampia trattazione ([1]).

La (8) può scriversi:

$$(11) \qquad A_n = \Delta \sum_{i=1}^{3} D_{in}(F_i), \qquad (n = 1 \div 6)$$

e, per la (7)

$$\Delta\varphi = \Delta \left\{ \sum_{n=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} D_{in}(F_i) \right\}.$$

Da cui ([2]):

$$(12) \qquad \varphi = \sum_{n,i=1}^{3} D_{in}(F_i).$$

Si hanno così tutti gli elementi per dedurre le espressioni

([1]) Vedi in proposito gli scritti del MORERA e del BELTRAMI citati nella nota a pag. 72.

([2]) La deduzione della (12) dalla relazione che la precede, dà la φ a meno di una funzione armonica arbitraria.

Siccome però entro le (5), (6) nessun'altra relazione tra F_i e φ viene usata all'infuori della (12), basta assumere quest'ultima come determinatrice di φ, date le F_i, per togliere ogni ambiguità.

delle tensioni mediante le (5), le (6), e le tre funzioni biarmoniche arbitrarie F_i.

Esse espressioni conterranno le derivate di un ordine due volte superiore a quello degli operatori D_{in}.

3. Rimane ora da esaminare soltanto qualche applicazione concreta del precedente svolgimento a determinate forme degli operatori D_{in}.

Il MAXWELL propose il seguente sistema per la risoluzione delle equazioni di CAUCHY:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2},$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}.$$

Corrispondentemente faremo:

$$A_1 = \Delta\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right), \text{ ecc.}$$

$$A_4 = -\Delta \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}, \text{ ecc..}$$

Per le (9), (12):

$$\varphi = -\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right).$$

Ed infine:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= (\nu - 1)\Delta\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right) - \Delta\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right), \text{ ecc.} \\ \tau_{yz} &= -(\nu - 1)\Delta \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right), \text{ ecc..} \end{aligned}\right.$$

Un'altra possibilità di risoluzione delle equazioni di CAUCHY è stata indicata dal MORERA: egli pone:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \text{ ecc.} \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right), \text{ ecc..}$$

Perciò si deve fare:

$$A_1 = \Delta \frac{\partial_2 F_1}{\partial y \partial z}, \text{ ecc.}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\Delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$

$$\varphi = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}.$$

Donde:

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_x &= (\nu-1)\Delta\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}+\Delta\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}\right), \text{ ecc.}\\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2}(\nu-1)\Delta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}\right), \text{ ecc.}.\end{aligned}\right.$$

Infine una terza soluzione delle equazioni indefinite dell'equilibrio è la seguente:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right);\quad \sigma_y=\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right);\quad \sigma_z=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right);\quad \tau_{xz}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right);\quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right);$$

che può anche porsi sotto la forma:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\omega_1}{\partial y\partial z};\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x\partial z};\quad \sigma_z=\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x\partial y};$$

$$\tau_{yz}=\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2};\quad \tau_{xz}=\frac{\partial^2\omega_2}{\partial y^2};\quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2\omega_3}{\partial z^2};$$

dove le ω sono legate dalla relazione:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}=0.$$

In base a ciò si porrà:

$$A_1=\Delta\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)=\Delta\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}, \text{ ecc.}$$

$$A_4=\Delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)=\Delta\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2}, \text{ ecc.}$$

con:

$$\frac{\partial R_1}{\partial x}+\frac{\partial R_2}{\partial y}+\frac{\partial R_3}{\partial z}=0.$$

Si ha quindi:

$$\varphi=\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial x\partial y};$$

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_x &= (\nu-1)\Delta\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}+\Delta\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial x\partial y}\right), \text{ ecc.}\\ \tau_{yz} &= (\nu-1)\Delta\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial x\partial y}\right), \text{ ecc.}.\end{aligned}\right.$$