# Bollettino Unione Matematica Italiana



Maria Cibrario


## Rapporti tra serie di polinomi sferici generalizzati e serie trigonometriche


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **15** (1936), n.2, p. 77–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

# Rapporti tra serie di polinomi sferici generalizzati e serie trigonometriche.

Nota di MARIA CIBRARIO (a Torino).

**Sunto.** - *Si considerano alcuni noti sviluppi in serie di polinomi sferici generalizzati* $C_n^\nu(s)$, *e, mediante una formula che trasforma il polinomio* $C_n^\nu(s)$ *nella funzione* $\operatorname{sen}(n+\nu)\varphi$, *si ricavano sviluppi in serie trigonometriche per due classi di funzioni ipergeometriche di* GAUSS.

Il prof. TRICOMI, in un suo recente lavoro [1], introduce le formule di MEHLER generalizzate:

$$(1)\qquad \begin{cases} C_n^\nu(s) = \dfrac{2^{1-\nu}\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma^2(\nu)\, n!}(1-s^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\displaystyle\int_s^1 \frac{\cos(n+\nu)\arccos t}{(t-s)^{1-\nu}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt, \\[2ex] C_n^\nu(s) = \dfrac{2^{1-\nu}\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma^2(\nu)\, n!}(1-s^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\displaystyle\int_{-1}^s \frac{\cos[(n+\nu)\arccos t-\nu\pi]}{(s-t)^{1-\nu}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt, \end{cases}$$

dove le $C_n^\nu(s)$ sono i polinomii sferici generalizzati ed è supposto $\nu>0$.

Queste formule saranno qui utilizzate per ottenere, da certi noti sviluppi in serie di polinomii sferici generalizzati, alcuni sviluppi in serie trigonometriche, che, in parte, riescono nuove.

Considerando, p. es., la prima delle (1), e applicando la formula di ABEL, si ottiene, supposto $0<\nu<1$:

$$\frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu)\operatorname{sen}\nu\pi}\,\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!}\int_t^1\frac{\cos(n+\nu)\arccos\tau}{(1-\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau = \int_t^1\frac{C_n^\nu(s)(1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu}\,ds.$$

ed eseguendo l'integrazione, indicata a primo membro:

$$(2)\qquad \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu)\operatorname{sen}\nu\pi}\,\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,(n+\nu)}\operatorname{sen}(n+\nu)\arccos t = \int_t^1\frac{C_n^\nu(s)(1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu}\,ds.$$

Se ora è data la serie

$$(3)\qquad \psi(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\,C_n^\nu(s)\qquad(0<\nu<1),$$

[1] F. TRICOMI, *Trasformazioni funzionali e polinomii ortogonali, in ispecie sferici*, « Boll. Un. Mat. Ital. », anno XIV (1935), n. 4, pp. 213-218 e n. 5, pp. 277-282. Per le formule (1), v. n. 4, § 3, p. 218, form. (12), da cui si ottengono le (1), ponendo $s=\cos\vartheta$, $t=\cos\varphi$.

e se si pone:

$$(4) \qquad \Phi(t) = \int_t^1 \psi(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds \qquad (-1 < t < 1),$$

si trova per la $\Phi(t)$ lo sviluppo:

$$(5) \qquad \Phi(t) = \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu) \operatorname{sen} \nu\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,(n+\nu)} c_n \operatorname{sen}(n+\nu) \arccos t.$$

Ciò nell'ipotesi che la serie (3) si possa integrare termine a termine; in vista delle applicazioni si osservi che per la validità della (5) è sufficiente che la serie (5) converga uniformemente in ogni intervallo $t \leq s \leq 1 - \varepsilon$ $(-1 < t < 1)$, che esista l'integrale (4) e che la serie che compare al secondo membro della (5) converga almeno per $|t| < 1$. Infatti in questa ipotesi si ha:

$$\Phi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_t^{1-\varepsilon} \psi(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_t^{1-\varepsilon} C_n^\nu(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds =$$

$$= \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu) \operatorname{sen} \nu\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,(n+\nu)} c_n \operatorname{sen}(n+\nu) \arccos t -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{1-\varepsilon}^1 C_n^\nu(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds,$$

perchè, per ipotesi, la prima di queste due serie converge. Preso ora $\varepsilon$ tanto piccolo, che per ogni $\varepsilon_1 < \varepsilon$ sia

$$\left| \int_{1-\varepsilon}^{1-\varepsilon_1} \psi(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{1-\varepsilon}^{1-\varepsilon_1} C_n^\nu(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds \right| < \eta,$$

dove $\eta$ è una quantità piccola a piacere, si ha subito:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{1-\varepsilon}^1 C_n^\nu(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds \right| \leq \eta,$$

e:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{1-\varepsilon}^1 C_n^\nu(s) \frac{(1-s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}}{(s-t)^\nu} ds = 0.$$

Segue di qui la validità della formula (5).

**1.** Come prima applicazione di quanto precede, si consideri lo sviluppo in serie di polinomii sferici generalizzati:

$$(6)\qquad (1-s)^\rho = \frac{2^{\rho+2\nu}\Gamma(\nu)\Gamma\left(\rho+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+\nu)\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)}{\Gamma(n+2\nu+\rho+1)} C_n^\nu(s),$$

che è convergente per $\rho > -\frac{\nu+1}{2}$ [1]. Supposto $\rho$ non intero, ponendo nell'integrale (4): $\psi(s)=(1-s)^\rho$, e facendo $s=t+(1-t)\lambda$, si ottiene:

$$(1-t)^{\rho+\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}\int_0^1 \lambda^{-\nu}(1-\lambda)^{\rho+\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t-1}{t+1}\lambda\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma\left(\rho+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}(1-t)^{\rho+\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2}-\nu,\, 1-\nu,\, \rho+\frac{3}{2},\, \frac{t-1}{t+1}\right),$$

dove $F$ è la funzione ipergeometrica di GAUSS. Applicando la (5) si ha con qualche riduzione:

$$(7)\qquad (1-t)^{\rho+\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2}-\nu,\, 1-\nu,\, \rho+\frac{3}{2},\, \frac{t-1}{t+1}\right)=$$

$$= \frac{2^{\rho+\nu+1}\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)}{n!}\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+2\nu+\rho+1)}\operatorname{sen}(n+\nu)\arccos$$

che, per $t=\cos\varphi$, diviene:

$$(7')\qquad \left(\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)^{2\rho+1}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2\nu-1}F\left(\frac{1}{2}-\nu,\, 1-\nu,\, \rho+\frac{3}{2},\, -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1)}{n!}\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+2\nu+\rho+1)}\operatorname{sen}(n+\nu)\varphi.$$

Per provare la validità degli sviluppi (7) e (7') basterà dimo-

(1) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, etc., « Journ. de Math. », 3e série, t. 4, 1878, pp. 5-56 e pp. 377-416; v. la form. (18) a p. 384, in cui è dato, più in generale, uno sviluppo in serie di polinomii di JACOBI.

strare che la serie, che in esse compare, è convergente. A tale scopo scriviamo la serie nella forma:

$$\frac{2\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\pi\Gamma(-\rho)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n-\rho)\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\nu+\rho+1)}\operatorname{sen}(n+\nu)\varphi.$$

Applichiamo la formula di STIRLING (¹):

$$\Gamma(x)=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{\vartheta}{12x}}\qquad(x>0;\ 0\leq\vartheta<1), \tag{8}$$

e consideriamo nella serie (7′) i termini corrispondenti a $n\geq n_1$, dove $n_1$ è il più piccolo intero maggiore di $\rho$; si ottiene:

$$\frac{2\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(-\rho)}e^{2\rho+2}\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{(n-\rho)^{n-\rho-\frac{1}{2}}(n+2\nu)^{n+2\nu-\frac{1}{2}}e^{\alpha(n)}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+2\nu+\rho+1)^{n+2\nu+\rho+\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}(n+\nu)\varphi,$$

dove si è posto:

$$\alpha(n)=\frac{1}{12}\left[\frac{\vartheta_1}{n-\rho}+\frac{\vartheta_2}{n+2\nu}-\frac{\vartheta_3}{n+1}-\frac{\vartheta_4}{n+2\nu+\rho+1}\right]\qquad(0\leq\vartheta_i<1).$$

Facciamo il rapporto tra un termine della serie e il termine corrispondente della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(n+\nu)\varphi}{(n+\nu)^{2\rho+2}}, \tag{9}$$

e scriviamolo nella forma:

$$\left(\frac{n-\rho}{n+1}\right)^{n-\rho-\frac{1}{2}}\left(\frac{n+2\nu}{n+2\nu+\rho+1}\right)^{n+2\nu-\frac{1}{2}}\frac{(n+\nu)^{2\rho+2}}{(n+1)^{\rho+1}(n+2\nu+\rho+1)^{\rho+1}}e^{\alpha(n)}.$$

Il limite di questa espressione per $n\to+\infty$ è $e^{-2\rho-2}$, cioè finito e non nullo; le serie (7) e (7′) convergono come la serie (9), e quindi uniformemente per $0\leq\varphi\leq\pi$, se è $\rho>-\frac{1}{2}$, e uniformemente per $0<\varphi<\pi$, se è $-1<\rho\leq-\frac{1}{2}$.

La funzione ipergeometrica $F\left(\frac{1}{2}-\nu,\ 1-\nu,\ \rho+\frac{3}{2},\ -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$ appartiene, a meno di fattori costanti, alla categoria di quelle, dette

(¹) NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Erster Teil Kap. VII, § 36, p. 91, form. (2).

dal NIELSEN funzioni metasferiche [1]. La (7') comprende, per valori particolari di $\rho$ e di $\nu$, varie formule note; per $\rho=0$, scrivendo inoltre $2\varphi$ al posto di $\varphi$, si ottiene:

$$F\left(1-\nu,\ \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{3}{2},\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right)=\frac{\operatorname{sen}2\nu\varphi}{2\nu\operatorname{sen}\varphi}(\cos\varphi)^{1-2\nu},$$

da cui, passando al limite per $\nu\to 0$, si ha:

$$F\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\operatorname{tg}^2\varphi\right)=\varphi\operatorname{cotg}\varphi,$$

ormule dovute a GAUSS [2]. Ponendo nella (7') $\nu=\frac{1}{2}$, $2\rho+1=m$ [3], scrivendo $2\varphi$ al posto di $\varphi$ e riducendo, si ha la nota formula [4]:

$$\operatorname{sen}^m\varphi=\frac{2m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{(m+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)\operatorname{sen}(2n+1)\varphi}{(m+3)(m+5)\dots(m+2n+1)}$$

2. Passando ad un altro esempio di applicazione della formula (5), si consideri la serie [5]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\Gamma^2(\nu)}{2^{1-2\nu}\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+\nu)(2n)!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(2n+2\nu)n!\,\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}C_{2n}^{\nu}(s). \tag{10}$$

Ponendo nell'integrale (4) $\psi(s)=(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$, e applicando la formula (5) si ottiene, con calcoli analoghi a quelli del § 1:

$$(1+t)^{\nu-1}F\left(1-\nu,\ 1-\nu,\ 1,\ \frac{t-1}{t+1}\right)= \tag{11}$$

$$=\frac{2^\nu}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+\nu)}{n!\,\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}\operatorname{sen}(2n+\nu)\arccos t.$$

[1] NIELSEN, *Théorie des fonctions métasphériques.* Deuxième Partie, Chap. V, § XVII, p. 61. Le funzioni metasferiche sono, a meno di fattori costanti, le funzioni ipergeometriche del tipo: $F\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2},\ \gamma,\ x\right)$.

[2] GAUSS, *Werke*, t. III, p. 127, form. XVIII e XV.

[3] La formula, che segue, vale comunque sia $m$, intero o no.

[4] « Enc. d. Math. Wiss. », II, 1, 2 Hälfte, Analysis, 12. H. BURKHARDT, *Trigonometrische Reihen und Integrale*, I, § 18, e), p. 937, form. (425).

[5] GEGENBAUER, *Zur Theorie der Funktionen* $C_n^\nu(x)$. « Denkschr. Akad. Wien » (Math.), t. 48, 1884, pp. 293-316; v. p. 305, form. (69).

e per $t = \cos\varphi$:

$$(11') \qquad \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2\nu-2} F\left(1-\nu,\ 1-\nu,\ 1,\ -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+\nu)}{n!\,\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{sen}(2n+\nu)\varphi.$$

Collo stesso metodo tenuto nel § 1 si prova che la serie (11), o (11'), ~~converge~~ uniformemente per $0 < \varphi < \pi$.

In particolare, poichè l'integrale ellittico completo di prima specie di LEGENDRE $K(x)$ si può esprimere mediante la formula:

$$K(x) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ x^2\right),$$

ponendo nella (11') $\nu = \frac{1}{2}$ e scrivendo $2\varphi$ al posto di $\varphi$, si ottiene lo sviluppo:

$$(12) \qquad K(i\operatorname{tg}\varphi) = \cos\varphi \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\right]^2 \operatorname{sen}(4n+1)\varphi,$$

o anche:

$$(12') \qquad K(i\operatorname{tg}\varphi) = \pi\cos\varphi \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1\cdot 3 \dots (2n-1)}{2\cdot 4 \dots 2n}\right]^2 \operatorname{sen}(4n+1)\varphi,$$

che è uniformemente convergente per $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Dal confronto di questa formula, con una analoga, data dal prof. TRICOMI [1], si trova che è:

$$K(i\operatorname{tg}\varphi) = \cos\varphi K(\operatorname{sen}\varphi),$$

cioè, ponendo $\operatorname{sen}\varphi = k$; $\cos\varphi = \sqrt{1-k^2} = k'$, che è:

$$K\left(i\frac{k}{k'}\right) = k'K(k),$$

formula ben nota [2], relativa alla teoria degli integrali ellittici.

[1] F. TRICOMI, loc. cit., § 6, form. (27), p. 282.

[2] TANNERY-MOLK, *Fonctions elliptiques*, t. 3, Chap. VII, II, § 543, p. 205.