Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Salvatore Di Noi

Linea di stringimento di una superficie di geodetiche in uno spazio curvo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 83–86.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_83_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Linea di stringimento di una superficie di geodetiche in uno spazio curvo.

Nota di SALVATORE DI NOI (a Viterbo).

Sunto. - *Si dimostra la proprietà caratteristica della linea di stringimento della superficie di* ∞^1 *geodetiche g di* V_n: *è nulla nei suoi punti la curvatura geodetica relativa delle linee che tagliano le g sotto angolo costante.*

Se S è la superficie luogo di ∞^1 geodetiche g di uno spazio curvo V_n, uscenti dai punti di una curva Γ, si dice che Γ è linea di stringimento per queste geodetiche se essa è luogo del punto in cui ogni g è più vicina alla successiva.

È noto ([1]) allora che Γ è anche il luogo dei punti in cui è nulla la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle g, e che le direzioni delle tangenti alle g nei punti di Γ sono parallele, nel senso di LEVI-CIVITA, rispetto ad S.

Valendomi dei metodi vettoriali elaborati dal prof. BOGGIO ([2]), mi propongo di mostrare che nei punti di Γ è anche nulla la curvatura geodetica relativa ad S delle traiettorie isogonali delle g, delle linee cioè che incontrano le g sotto uno stesso angolo; e viceversa, se nei punti di Γ è nulla detta curvatura, Γ è linea di stringimento.

Indico con $\mathbf{u}$ il vettore di modulo 1 tangente nel punto Q di S alla g passante per quel punto, vettore quindi funzione di Q; con dQ uno spostamento infinitesimo di Q lungo Γ e con $d\mathbf{u}$ il corrispondente incremento, pure infinitesimo, di $\mathbf{u}$; se Γ è linea di stringimento per le g, l'elemento d'arco δQ di S, normale al vettore $\mathbf{u}$ uscente dal punto Q di Γ, dev'essere normale anche al successivo vettore $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$, cioè:

$$\mathbf{u} \times \delta Q = 0\,; \quad (\mathbf{u} + d\mathbf{u}) \times \delta Q = 0 \tag{1}$$

e quindi:

$$d\mathbf{u} \times \delta Q = 0.$$

Ed essendo anche:

$$d\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0 \qquad \text{(da: } \mathbf{u}^2 = 1\text{)},$$

([1]) Ved. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ediz., vol. II, pag. 788 e seg.; oppure la Memoria dello stesso Autore, *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi*, (« Rendic. dell'Acc. di Scienze Fis. e Matem. di Napoli », XXVIII, a. 1922, pag. 150.

([2]) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, parte 2ª, Zanichelli, Bologna, 1930. Questo trattato verrà citato in seguito con *Geom. diff.*.

si ricava, da queste due ultime relazioni, che $d\mathbf{u}$ è perpendicolare al piano tangente ad S nel punto Q; usando il *differenziale superficiale* (*Geom. diff.*, p. 177), si può scrivere:

$$d_v\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Ciò vuol dire che i vettori $\mathbf{u}$, uscenti dai punti di Γ, sono paralleli, nel senso di LEVI-CIVITA, rispetto ad S (*Geom. diff.*, p. 256).

E poichè le g sono geodetiche anche per S, per uno spostamento ∂Q di Q lungo una g si ha anche per $\mathbf{u}$:

$$\partial_v\mathbf{u} = 0. \tag{3}$$

La (2) e la (3) si possono scrivere:

$$\frac{d_v\mathbf{u}}{dQ}\, dQ = 0, \quad \frac{d_v\mathbf{u}}{dQ}\, \partial Q = 0, \tag{4}$$

dove $d_v\mathbf{u}/dQ$, che dicesi *derivata superficiale* di $\mathbf{u}$ nel punto Q, è una omografia, funzione di $\mathbf{u}$ e di Q, che trasforma vettori tangenti ad S nel punto Q in vettori tangenti nello stesso punto ad S (*Geom. diff.*, p. 186).

Se $d'Q$ è un qualsiasi altro spostamento infinitesimo del punto Q di Γ su S, potendosi sempre porre:

$$d'Q = a\,dQ + b\,\partial Q, \qquad (a,\ b \text{ quantità reali}) \tag{5}$$

si ha corrispondentemente per $\mathbf{u}$, in virtù delle (4):

$$d_v'\mathbf{u} = \frac{d_v\mathbf{u}}{dQ}\, d'Q = \frac{d_v\mathbf{u}}{dQ}(a\,dQ + b\,\partial Q) = a\,d_v\mathbf{u} + b\,\partial_v\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Ciò vuol dire che il vettore $\mathbf{u}$ si mantiene parallelo, nel senso di LEVI-CIVITA, per qualsiasi spostamento infinitesimo del punto Q di Γ.

Consideriamo ora un sistema di linee l traiettorie isogonali delle g; indicando con $\mathbf{t}$ il vettore unitario ad esse tangenti si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{t} = \text{cost.}$$

e per uno spostamento $d'Q$ del punto Q:

$$d_v'\mathbf{u} \times \mathbf{t} + d_v'\mathbf{t} \times \mathbf{u} = 0. \tag{7}$$

Se Q è un punto di Γ, per la (6) quest'ultima formula diventa:

$$d_v'\mathbf{t} \times \mathbf{u} = 0;$$

ed essendo anche:

$$d_v'\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0 \qquad (\text{da}: \ \mathbf{t}^2 = 1)$$

si ricava:

$$d_v'\mathbf{t} = 0. \tag{8}$$

Cioè: si mantiene parallelo nel senso di LEVI-CIVITA per uno spostamento infinitesimo del punto Q di Γ anche il vettore $\mathbf{t}$ [1].

Se $d'Q$ è parallelo a $\mathbf{t}$, essendo (*Geom. diff.*, p. 219):

$$d'\mathbf{t} = c_r \mathbf{n}_r d's$$

(dove c_r è la curvatura geodetica di l nel punto Q relativa ad S, $\mathbf{n}_r$ è il vettore unitario parallelo alla normale principale relativa di l nel punto Q, e $d's$ è il modulo di $d'Q$) si ha dalla (8):

$$c_r = 0. \tag{9}$$

Cioè: *nei punti di* Γ *è nulla la curvatura geodetica relativa delle linee* l.

Viceversa: se nei punti di Γ è verificata la (9) e quindi per uno spostamento $d'Q$ parallelo a $\mathbf{t}$ è:

$$d_v'\mathbf{t} = 0,$$

dalla (7) si ricava la (6), e da questa, mediante le (3) si risale alla (2) e quindi alle (1).

Dunque: se nei punti di Γ è nulla la curvatura geodetica delle linee isogonali delle g, Γ è linea di stringimento di queste geodetiche.

NOTA. — Questo risultato è d'accordo con quello del prof. SANSONE [2].

Se $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ è un sistema di traiettorie isogonali, secondo un angolo σ, delle linee coordinate $u = \text{cost.}$ d'una superficie S, i centri di curvatura geodetica di tutte le linee del sistema passanti per uno stesso punto Q di S sono allineati. Se le linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ sono ortogonali, si ha per i rispettivi raggi di curvatura geodetica:

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho_u} + \frac{\cos\sigma}{\rho_v}.$$

Questo risultato si ottiene facilmente col metodo vettoriale.

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{t}$ i vettori unitari tangenti in un punto Q di S rispettivamente alle linee, passanti per esso, $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $\varphi(u, v) = \text{cost.}$; siano inoltre dQ, δQ e $d'Q$ gli spostamenti di Q pa-

[1] Ovvio perchè $\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}$ sono rigidamente collegati e quindi mantenendosi parallelo uno, per lo spostamento $d'Q$, si mantiene anche l'altro parallelo (*Geom. diff.*, pag. 259).

[2] G. SANSONE, *Sulle superficie con due famiglie, ecc.*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », XLVI, 1922.

ralleli ai tre vettori; per la (5) si ha:

$$d_v'\mathbf{t} = \frac{d_r(\cos\sigma\mathbf{u} + \operatorname{sen}\sigma\mathbf{v})}{dQ}(adQ + b\delta Q) = \cos\sigma(ad_r\mathbf{u} + b\delta_r\mathbf{u}) + \\ + \operatorname{sen}\sigma(ad_r\mathbf{v} + b\delta_r\mathbf{v});$$

oppure:

$$d_v'\mathbf{t} = \cos\sigma(ad_r\mathbf{u}\times\mathbf{v} + b\delta_r\mathbf{u}\times\mathbf{v})\mathbf{v} + \operatorname{sen}\sigma(ad_r\mathbf{v}\times\mathbf{u} + b\delta_r\mathbf{v}\times\mathbf{u})\mathbf{u}:$$

e tenendo conto che $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 0$, per formule analoghe alla (7):

$$d_v'\mathbf{t} = \cos\sigma(ad_r\mathbf{u}\times\mathbf{v} - b\delta_r\mathbf{v}\times\mathbf{u})\mathbf{v} + \operatorname{sen}\sigma(-ad_r\mathbf{u}\times\mathbf{v} + b\delta_r\mathbf{v}\times\mathbf{u})\mathbf{u} \\ = (ad_v\mathbf{u}\times\mathbf{v} - b\delta_r\mathbf{v}\times\mathbf{u})(-\operatorname{sen}\sigma\mathbf{u} + \cos\sigma\mathbf{v}).$$

Da cui risulta che:

$$\operatorname{mod} d_r'\mathbf{t} = \operatorname{mod}(ad_r\mathbf{u}\times\mathbf{v} - b\delta_r\mathbf{v}\times\mathbf{u}).$$

Tenendo ora conto che: $ads/d's = \cos\sigma$, e che: $b\delta s/d's = \operatorname{sen}\sigma$, si ha:

$$\operatorname{mod}\frac{d_r'\mathbf{t}}{d's} = \operatorname{mod}\left(\cos\sigma\frac{d_r\mathbf{u}}{ds}\times\mathbf{v} - \operatorname{sen}\sigma\frac{\delta_r\mathbf{v}}{\delta s}\times\mathbf{u}\right).$$

Se C è il centro di curvatura geodetica della linea $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ passante per Q, e $\lambda = \operatorname{tang}\sigma$, se ne deduce:

$$C - Q = \frac{d_r'\mathbf{t}}{d's} : \left(\frac{d_r'\mathbf{t}}{d's}\right)^2 = \frac{-\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\frac{d_r\mathbf{u}}{ds}\times\mathbf{v} - \lambda\frac{\delta_r\mathbf{v}}{\delta s}\times\mathbf{u}}$$

da cui si vede che C, al variare di λ, descrive una retta.