Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesca Agro

Sopra una classe di polinomi definiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 86–89.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_86_0>

Sopra una classe di polinomi definiti.

Nota di FRANCESCA AGRÒ (a Messina) (*).

Sunto. - *Si precisa un risultato del* COLUCCI, *accertando, con processo puramente algebrico, che la classe trovata da detto* A *è di polinomi tutti definiti (anzichè definiti o semidefiniti).*

Ultimamente il COLUCCI (1) ha fatto conoscere, fra l'altro, una notevole classe di polinomi definiti o semidefiniti soddisfacenti ad un certo tipo di equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, il cui termine noto sia un polinomio anch'esso definito o semidefinito.

(*) Lavoro eseguito nella R. Scuola di Matematica della R. Università di Messina nell'anno accademico 1934-35.

(1) *Sui polinomi definiti*, [« Atti R. Acc. Scienze Fis. Napoli »], vol. XX, serie 2ª (1934-XII)].

Il procedimento del COLUCCI è basato su facili considerazioni di carattere infinitesimale. Però la natura della questione lascierebbe desiderare una dimostrazione puramente algebrica.

Io sono riuscita a darne una, assai semplice, fondata sull'applicazione dei notevoli teoremi dello HURWITZ e del FUIJWARA, recentemente riottenuti, inquadrati in una trattazione sistematica, dal prof. CHERUBINO [1].

Oltre che nella natura algebrica dei mezzi impiegati, l'interesse di queste pagine sta in una maggior precisazione del risultato del COLUCCI, consistente nell'aver assodato che quei polinomi sono addirittura definiti.

1. Consideriamo l'equazione differenziale del 1° ordine:

$$\varphi(x) - \alpha_1\varphi'(x) = f_1(x) \tag{1}$$

dove $f_1(x)$ è un polinomio definito o semidefinito positivo, di grado $2m$ ed α_1 una costante reale non nulla.

Derivando $2m$ volte e supponendo, se possibile, $\varphi(x)$ polinomio di grado $2m$, si ha:

$$\begin{cases} \varphi(x) - \alpha_1\varphi'(x) = f_1(x) \\ \varphi'(x) - \alpha_1\varphi''(x) = f_1'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(2m)}(x) = f_1^{(2m)}(x). \end{cases}$$

Questo è un sistema di $2m+1$ equazioni nelle $2m+1$ incognite: $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(2m)}(x)$; risolvendolo rispetto a $\varphi(x)$ si ottiene:

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & -\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f_1'(x) & 1 & -\alpha_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(2m-1)}(x) & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_1 \\ f_1^{(2m)}(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cioè

$$\varphi(x) = f_1(x) + \mu_1' f_1'(x) + \ldots + \mu_{2m}' f_1^{(2m)}(x) \tag{2}$$

ove

$$\mu_i' = \alpha_1^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m).$$

[1] Vedi le due Memorie di questo A. dal titolo:

a) *Sui polinomi definiti o semidefiniti*, [« Rend. R. Acc. Scienze Napoli »], vol. XXXV, serie 4ª (1929-VII)].

b) *Sulle forme associate ai polinomi*, [« Rend. Sem. Padova »], (1931-IX).

Il polinomio (2), che soddisfa ovviamente alla (1), è del tipo di quelli studiati dallo HURWITZ e dal FUIJWARA, quindi, per i teoremi di questi Autori, $\varphi(x)$ sarà definito o semidefinito, se tale è la forma quadratica:

$$\psi(y) = y \cdot \left\| \binom{r+s}{r} \mu'_{r+s} \right\| \cdot y_{-1}; \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_m). \tag{3}$$

Anzi, poichè questa, come subito si vede, è definita [1], $\varphi(x)$ è sempre definito, anche se $f(x)$ sia semidefinito (vedi i teoremi predetti). Pertanto:

a) *Il polinomio* $\varphi(x)$, *che soddisfa all'equazione differenziale del 1° ordine:*

$$\varphi(x) - \alpha_1\varphi'(x) = f_1(x)$$

ove $f_1(x)$ *è un polinomio definito o semidefinito positivo ed* α_1 *una costante reale non nulla, è sempre definito positivo.*

2. Si consideri ora il sistema

$$f_i(x) - \alpha_{i+1} f_i'(x) = f_{i+1}(x) \qquad i = (1, 2, \ldots, k-1) \tag{4}$$

e si supponga che $f_k(x) = f(x)$ sia definito o semidefinito, le α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_k$ essendo $k-1$ costanti reali non nulle.

Da queste e dalla (1), successivamente sostituendo, si ricava l'equazione

$$\varphi(x) - \sigma_1\varphi'(x) + \sigma_2\varphi''(x) - \ldots + (-1)^k\sigma_k\varphi^{(k)}(x) = f(x)$$

ove

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k; \quad \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{k-1}\alpha_k; \ldots;$$
$$\sigma_k = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k.$$

L'applicazione successiva della proposizione a) alle (4), cominciando da $i = k-1$, ci assicura che:

b) *Il polinomio* $\varphi(x)$, *che soddisfa all'equazione differenziale del* k^o *ordine*

$$\varphi(x) - \sigma_1\varphi'(x) + \sigma_2\varphi''(x) - \ldots + (-1)^k\sigma_k\varphi^{(k)}(x) = f(x) \tag{5}$$

ove $f(x)$ *è un polinomio definito o semidefinito e* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *sono le funzioni simmetriche elementari delle costanti reali non nulle* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *è necessariamente un polinomio definito.*

[1] Infatti il determinante della matrice discriminante della (3), che indichiamo con $|\mu'|$, si calcola facilmente dividendo successivamente le righe e le colonne per $\alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^m$, sottraendo ancora da ciascuna riga la precedente ed applicando la formula di STIEFEL: così di seguito. Si ottiene in definitiva che $|\mu'|$ e tutti i determinanti dei suoi minori principali, che coincidono con $|\mu'|$ per gli ordini $s = 1, 2, \ldots, m$, sono uguali ad $\alpha_1^{s(s+1)}$, onde sono tutti non nulli e positivi.

3. Per ottenere il polinomio $\varphi(x)$, soddisfacente alla (5), espresso con $f(x)$ e le sue derivate successive, si osservi che dalle equazioni (4) si possono ricavare formule analoghe alla (2) con il procedimento che si è seguito per la (1). Si ottiene così il sistema:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{r_1=0}^{2m} \alpha_1^{r_1} f_1^{(r_1)}(x) \\ f_1(x) = \sum_{r_2=0}^{2m} \alpha_2^{r_2} f_2^{(r_2)}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{k-1}(x) = \sum_{r_k=0}^{2m} \alpha_k^{r_k} f_k^{(r_k)}(x). \end{cases}$$

Con successive sostituzioni, a cominciare dalla 1ª, si ricava:

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{2m} {}_{r_1+r_2+\ldots+r_k} \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_k^{r_k} f(x)^{(r_1+r_2+\ldots+r_k)} \tag{6}$$

(ove $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sono numeri interi non negativi) cioè

$$\varphi(x) = f(x) + \mu_1 f'(x) + \mu_2 f''(x) + \ldots + \mu_{2m} f^{(2m)}(x) \tag{7}$$

con

$$\mu_i = \Sigma\, \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \ldots \alpha_k^{r_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m)$$

la sommatoria essendo estesa a tutti gli esponenti non negativi $r_1, r_2, \ldots, r_k$, per i quali si ha:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = i.$$

La (7) è anch'essa un'equazione del tipo studiato dallo HURWITZ e dal FUIJWARA, sicchè, scelto $f(x)$ in modo qualunque, definito o semidefinito, $\varphi(x)$ risulterà definito allora e solo che una delle due forme (quindi anche l'altra)

$$\psi(y) = y \cdot \left\| \binom{r+s}{s} \mu_{r+s} \right\| \cdot y_{-1} \tag{8}$$

$$\varphi(y) = y \cdot \| (r+s)!\, \mu_{r+s} \| \cdot y_{-1} \tag{8'}$$

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_m); \qquad (r, s = 0, 1, \ldots, m)$$

sia definita.

Tale condizione è necessaria, perchè abbiamo supposto $f(x)$ variabile ad arbitrio nell'insieme di tutti i polinomi definiti o semidefiniti [1].

Ma $\varphi(x)$ si è dimostrato definito, dunque sono sempre tali anche le forme (8), (8').

[1] Vedi il teorema IV a pag. 13 della seconda delle due Memorie del prof. CHERUBINO, citata nella (2) n. 1.