UMI

Recensioni

* David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen (B. Levi)
* E. Madelung: Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers
* G. Vitali - G. Sansone: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Parte II (Silvio Cinquini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.2, p. 90–95.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_2_90_0>

RECENSIONI

DAVID HILBERT: *Gesammelte Abhandlungen.* Dritter Band Berlin, Springer, 1935, p. 435+VII, RM. 45, per l'estero RM. 33,75.

Si completa, con questo volume, la pubblicazione delle Opere di David Hilbert, secondo il programma che esclude dalla ripubblicazione quei lavori i quali hanno già avuto precedentemente altra sistemazione editoriale. Esso raccoglie, insieme con due esposizioni monografiche ad opera di Ernst Hellinger e di Paul Bernays (rispettivamente sulle Equazioni Integrali e sui Fondamenti dell'Aritmetica) e con una *Vita* ad opera di Otto Blumental, quegli scritti di Lui che meno potevano inquadrarsi nell'ordine sistematico che si è voluto assegnare ai due primi volumi; non però per questo i meno significativi per porci innanzi o ricordarci il compito che l'A. ha voluto imporsi ed ha saputo magnificamente assolvere di agitatore di idee, di apritore di strade. Tipico a questo riguardo il celebre Discorso tenuto al Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi nel 1900, posto qui come ultima delle Memorie scientifiche: dove, sotto il titolo di *Problemi matematici*, l'A. addita alla riflessione del nuovo secolo 23 problemi o meglio gruppi di interrogativi relativi a differenti teorie analitiche e geometriche ch'egli raccoglie come eredità del pensiero matematico dell'800. Di questi problemi alcuni sono stati di poi risoluti dall'Hilbert medesimo o da suoi allievi o da altri cultori (citiamo fra quelli la cui trattazione è recentissima quello della trascendenza delle potenze a esponente algebrico), altri restano tuttora aperti, preziosa miniera pei giovani, o per la loro vastità o per essere rimasti fin qui refrattari ai nostri sforzi.

Da queste ultime pagine, passiamo volentieri alle prime per rileggere le due Memorie sopra il *Principio di Dirichlet* pubblicate la prima volta rispettivamente nel « Jahresbericht d. d. Math. Vereinigung » (1900) e nel « Festschrift » dell'Accademia delle Scienze di Gottinga (1901), riguardanti la regolarizzazione del celebre principio di minimo: la prima ancora piuttosto programma che trattazione finita, la seconda, al contrario, modello di originalità e di rigore, ma limitata al caso particolare del problema di Riemann: forse per la prima volta trova applicazione in queste Memorie un procedimento regolarizzato di infinite scelte che, variamente imitato in altre occasioni, è stato ricco di risultati per l'analisi nel passato trentennio. Ci piace ricordare come queste due Memorie abbiano data la spinta allo studio sistematico della convergenza di successioni minimizzanti; un breve saggio bibliografico sui più significativi lavori seguiti in questo indirizzo si trova in nota alla Memoria *Zur Theorie der konformen Abbildung*, più innanzi riprodotta nel Volume (p. 73). Ma, quasi a testimoniare dell'orientamento ecclettico del pensiero dell'Hilbert, alle dette Memorie è fatto subito seguire quella *Zur Variationsrechnung* (1905–6), ove, sviluppando un ragionamento già accennato nel *Discorso* di Parigi, il problema delle condizioni sufficienti del calcolo delle variazioni è ripreso, con profonda veduta unitaria secondo il classico indirizzo dei campi di estremali. Segue a questa Memoria l'articolo programmatico da cui hanno prese le mosse le successive ricerche sullo *spazio hilbertiano*, riassumente idee esposte al Congresso di Roma del 1908: dico la Memoria del « Circolo Matematico di Palermo »: *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichen unabhängigen Variablen*. È noto che questo programma si ricollega ai principii direttivi della teoria delle equazioni integrali lineari svolta dall'Hilbert in sei Memorie pubblicate nelle « Göttinger Nachrichten » fra il 1904 e il 1910, e riunite poi in volume: invece della riproduzione di queste, programmaticamente esclusa, leggiamo qui una lucida esposizione monografica d'una cinquantina di facciate (già precedentemente accennata) in cui E. Hellinger inquadra storicamente l'opera dell'Hilbert a partire dalle ricerche di Liouville, Sturm, Volterra e rende conto degli importanti sviluppi che all'impulso dato dal nostro A. hanno seguito.

Un pensiero che ha costantemente fiancheggiato l'opera matematica dell'Hilbert e che negli ultimi anni ne è divenuto la nota dominante è quello rivolto all'analisi filosofica dei fondamenti della nostra scienza: manifestatosi dapprima nel 1899 coi *Grundlagen der Geometrie*; riaffermatosi nel Discorso di Parigi per quanto riguarda i fondamenti dell'aritmetica, della teoria degli aggregati, della fisica; sviluppatosi in ultimo nella forma più astratta dei fondamenti della matematica e della metamatematica. Il volume raccoglie i lavori di quest'ultimo indirizzo nell'ordine della loro pubblicazione, a partire da uno scritto programmatico del 1918, *Axiomatisches Denken*: il titolo medesimo di questo attesta di uno dei punti fondamentali della filosofia matematica del Nostro, forse parzialmente abbandonato nei tempi più recenti per concedere un certo posto ad una forma di intuizionismo colla considerazione del *finite Schliessen*: ma forse più e meglio una nitida idea dell'ultimo pensiero del nostro A. ci è presentata dalla esposizione di P. Bernays: *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik*, in cui lo svolgimento di tali ricerche è raffrontato coi contemporanei contributi di altri Autori e la lettura del quale ci pare illuminare utilmente, per la sua struttura sintetica, anche in più punti il volume sui *Grundlagen der Mathematik.*

Ragioni di brevità ci inducono ora a ricordare soltanto i restanti lavori dell'interessante volume i quali, mentre pure portano l'impronta del genio dell'A., minor seguito hanno avuto finora nella storia del pensiero matematico contemporaneo: voglio dire quello in cui si inizia una classificazione delle equazioni differenziali in due funzioni incognite secondo una nozione (*Klasse*) che richiama quella di equivalenza birazionale fra curve, le Memorie sui fondamenti della teoria della propagazione luminosa (*Stralungstheorie*) e sui fondamenti della fisica e le necrologie di Weierstrass, Minkowski, Darboux, Hurwitz.

Il volume si chiude con un elenco dei Corsi di lezioni tenuti dall'Hilbert, un elenco delle 69 Tesi da Lui dirette, e quello infine degli scritti (24) di Lui non riprodotti nella raccolta delle Memorie.

B. LEVI

E. MADELUNG: *Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers.* 3 Auflage, J. Springer, Berlin.

Il titolo dice lo scopo del libro: offrire al fisico uno stringato riassunto dei varî rami dell'analisi e della fisica-matematica con ampio formulario, per modo ch'egli abbia sottomano ciò che gli può servire nelle quotidiane ricerche senza dover ricorrere ai trattati speciali.

Questa terza edizione risponde meglio della prima al fine suddetto, giacchè è stata migliorata in gran parte ed accresciuta di altre formule e nuove nozioni. A parer nostro c'è ancora qualche piccola lacuna; per esempio, troppo poco è detto delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Anche la teoria delle dimensioni e più estese tabelle per il calcolo delle misure riuscirebbero utili.

L'ordinamento della materia non è sempre conforme alla tradizione: ci sono paragrafi d'algebra che seguono altri di calcolo differenziale e integrale; il che non par logico. Infine è strano che nel capitolo riguardante le equazioni integrali non figurino i nomi di FREDHOLM e VOLTERRA.

In ogni modo è un libro notoriamente utile, e questa nuova edizione sarà bene accolta. *p. b.*

G. Vitali - G. Sansone: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Parte II. (G. Sansone: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*). (Zanichelli, Bologna, 1935-(XIV), pp. VI+310).

Il volume che G. Sansone pubblica fra le Monografie di matematica applicata del Consiglio Nazionale delle Ricerche viene ad occupare in questa collezione un posto di primaria importanza per il grande impiego che viene fatto, non solo nella matematica pura ma anche in quella applicata, degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali e normali.

L'Opera è dedicata, precisamente, alle serie (trigonometriche) di Fourier, agli sviluppi in serie di polinomi di Legendre, e di polinomi di Tchebyceff-Laguerre e di Tchebyceff-Hermite, (oltrechè all'integrale di Stieltjes).

I primi due argomenti hanno formato oggetto, anche recentemente, di ottimi e completi trattati, veramente fondamentali, i quali però, a causa della loro vastità, talvolta non si addicono completamente alle esigenze del matematico applicato, il quale, almeno in un primo tempo, ha la necessità di impadronirsi rapidamente della materia, limitandosi a seguire la via più breve che, dai fondamenti della teoria, conduce a quei risultati che trovano maggiori applicazioni alla tecnica.

Il libro in esame risponde perfettamente a queste esigenze, perchè ha il grande pregio di esporre, chiaramente, in circa 300 pagine, oltre alle proprietà fondamentali delle classi di funzioni usate per questi sviluppi e degli sviluppi stessi, anche quelle più importanti e quelle più recenti. Ma il volume del Sansone, che è dunque preziosissimo per i matematici applicati, riesce non meno interessante agli Analisti, perchè l'A., che è un ottimo conoscitore della materia, ad alcuni rami della quale ha recato, in questi ultimi anni, numerosi e notevoli contributi scientifici (che solo in parte figurano nel volume a motivo dello scopo che esso ha), espone la teoria in forma originale, arrecando numerose semplificazioni alle dimostrazioni, finora assai complicate, di alcuni importanti teoremi, e rendendo, in tal modo, facile e gradita la lettura dell'Opera che è completamente soddisfacente sotto ogni punto di vista: per la chiarezza dell'esposizione, per il rigore e per gli esempi che illustrano lo sviluppo della teoria.

Particolarmente interessante è il Cap. IV, dedicato agli sviluppi in serie di polinomi di Tchebyceff-Laguerre e di Tchebyceff-Hermite, ai quali, come è noto, si ricorre per approssimare una funzione data su un intervallo di cui, rispettivamente, uno o entrambi gli estremi siano all'infinito. Questo studio è tuttora in pieno sviluppo e non si aveva alcuna opera che ne facesse una trattazione sistematica. L'A., dopo aver dato le proprietà più notevoli di questi polinomi e le relazioni che intercedono fra le due classi, stabilisce la chiusura di ognuno dei due sistemi rispetto alle funzioni a quadrato sommabile, con una propria dimostrazione, della quale dobbiamo rilevare la grande semplicità. Anche l'estensione, agli intervalli infiniti, della formula di Bessel, viene stabilita con una dimostrazione originale particolarmente semplice. Gli ultimi paragrafi del Capitolo sono dedicati alla convergenza uniforme e a quella puntuale. Per quest'ultimo problema l'A. riprende in considerazione le funzioni f_n $\left(\text{che si ottengono dal corrispondente polinomio di Tchebyceff-Hermite, moltiplicandolo per il fattore } \pi^{-\frac{1}{4}}(2^n n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$, delle quali già ha fatto uso per stabilire le formule di approssimazione asintotica dei polinomi di Tchebyceff-Hermite, pervenendo al notevole teorema di Uspensky, che riconduce il comportamento, in un punto x_0, dello sviluppo, in serie di funzioni $f_n(x)$, di una funzione $f(x)$, integrabile insieme con il suo quadrato in $(-\infty, +\infty)$, a quello della serie (trigonometrica) di Fourier di una funzione che coincide con la $f(x)$ in un intervallo, comunque piccolo, di cui x_0 sia il punto di mezzo. La dimostrazione di questo teorema si presenta in forma assai elementare, avendo l'A. brillantemente accoppiato la dimostrazione di Uspensky con quella di Kowalik.

La mancanza di spazio non ci permette di riferire, coll'ampiezza con cui desidereremmo, sui precedenti Capitoli, il primo dei quali, che è il più breve dell'opera, è dedicato alle generalità sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali e normali, e il secondo alle serie (trigonometriche) di Fourier. L'A. tratta rapidamente di questo importante sviluppo, rimandando per uno studio più profondo all'opera eccellente del TONELLI, senza per altro tralasciare alcuno degli argomenti più interessanti: approssimazione in media di una funzione per mezzo di polinomi trigonometrici, convergenza in media, convergenza puntuale, sommazione di Fejer, sommazione di Poisson, integrale di Fourier, la cui importanza per le applicazioni è ben nota.

Gli sviluppi in serie di polinomi di Legendre formano oggetto del Cap. III. L'A. si occupa dapprima delle proprietà più importanti di questi polinomi, e della chiusura del loro sistema la quale viene provata con dimostrazione originale. Passando poi alle serie di questi polinomi tratta, fra l'altro, della convergenza uniforme e di quella puntuale, pervenendo all'importante teorema di Hobson che stabilisce, nell'ipotesi che la funzione $f(x):(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$ sia sommabile in $(-1, 1)$, l'equiconvergenza fra le serie di Legendre di $f(x)$ nel punto x, e quella (trigonometrica) di Fourier di $f(\cos\gamma)\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\gamma$, nel punto $\gamma = \arccos x$, nonchè la semplice relazione che intercede fra le due somme. La dimostrazione di questo teorema risulta notevolmente semplificata in virtù dei perfezionamenti che l'A. ha apportato al teorema sui limiti degli integrali con estremi variabili.

Completamente diverso è l'argomento dell'ultimo Cap. (il V): l'integrale di Stieltjes, che trova la ragione di figurare in questo volume nelle applicazioni che ne vengono fatte. La teoria viene svolta dal punto di vista riemanniano (ossia di Mengoli-Cauchy) nel seguente modo. Supposta limitata la funzione integranda e, a variazione limitata, la funzione determinante, l'A. definisce l'integrale inferiore [superiore] come limite delle somme approssimate per difetto [per eccesso], relative a quelle successioni di suddivisioni in parti dell'intervallo d'integrazione, le quali godono della proprietà che ogni punto di discontinuità della funzione determinante (i quali sono al più un'infinità numerabile) sia estremo di almeno una parte di una suddivisione di ogni successione e di tutte le successive suddivisioni della stessa successione. Se i due integrali, inferiore e superiore, sono uguali, la funzione è integrabile e il valore dell'integrale è dato dal loro comune valore. L'A. stabilisce poi alcune proprietà di questo integrale pervenendo alla formula d'inversione del Lévy.

Fra le applicazioni figura il problema dell'assicurazione temporanea in caso di morte con capitale variabile. L'A. giunge a dedurre dalla convergenza di una successione di momenti la convergenza delle corrispondenti funzioni di ripartizione nelle ipotesi di Cantelli.

Il volume termina con un'ampia e accurata bibliografia di grande utilità al lettore che, attratto a questi studi dalla proficua lettura dell'ottima opera del Sansone, (che, anche a chi non ne conosca la prima parte, richiede soltanto la conoscenza dell'integrale di Lebesgue), voglia completare e approfondire la propria coltura in trattati più vasti e in memorie originali, per essere in grado di arrecare qualche nuovo risultato a questi interessanti Capitoli dell'Analisi, al cui progresso hanno già magistralmente contribuito illustri matematici Italiani.

Silvio Cinquini