Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Francesco Tricomi

Generalizzazione di una formula sui polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 102–105.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_102_0>

Generalizzazione di una formula sui polinomi di Legendre.

Nota di FRANCESCO TRICOMI (a Torino).

Sunto. - *Generalizzando una precedente formula dell'A, si ricava un elegante sviluppo dell'integrale ellittico di 1ª specie (incompleto) in serie di polinomi di* LEGENDRE.

In una mia recente Nota in questo stesso « Bollettino » (1) ho ottenuto — quale esempio di applicazione di generali considerazioni su i rapporti fra le serie di polinomi ortogonali e le trasformazioni funzionali lineari — una semplice formula, che credo nuova, collegante l'integrale ellittico (completo) di 1ª specie, di LEGENDRE $K(k)$ coi polinomi di LEGENDRE P_n, formula che, ponendo (come spesso è utile) $k = \sin\alpha$, può scriversi (2):

$$(1) \qquad 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1} = K(\sin\alpha), \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Cercando una più diretta dimostrazione di questa formula, mi sono ora accorto che essa può generalizzarsi in un modo analogo a quello usato da G. DOETSCH (3) per certi sviluppi in serie di polinomi di LAGUERRE, giungendo così ad una formula assai ele-

(1) *Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici*, [t. **14** (1935), 213-218 e 277-282].

(2) Nella formula quale è stata pubblicata nel succitato lavoro, figura — causa una svista — il limite inferiore di sommazione $n = 1$ invece di $n = 0$, come deve essere.

(3) *Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre*, [« Rend. Lincei », (6) **22** (1935II), 300-304].

gante sull'integrale ellittico di 1ª specie *incompleto* $F(\varphi)$, che — se non m'inganno — merita di essere fatta conoscere perchè, se anche non fosse nuova — come è ben possibile — essa sarebbe stata ingiustamente dimenticata.

Partiamo all'uopo dall'equazione generatrice dei polinomi di LEGENDRE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)s^n = \frac{1}{\sqrt{1-2st+s^2}}, \qquad (|s|<1)$$

che, ponendo $s = y^2$, $t = -\cos 2\alpha$, diviene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(\cos 2\alpha)\, y^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos 2\alpha\cdot y^2+y^4}}, \qquad (|y|<1),$$

pertanto, integrando rispetto ad y fra 0 ed x, $(0 \leq x < 1)$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+2\cos 2\alpha\cdot y^2+y^4}}. \tag{2}$$

L'integrale che figura nel secondo membro della (2) è un integrale ellittico di prima specie riducibile a forma canonica (di LEGENDRE) mediante la sostituzione

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{y} - y\right). \tag{3}$$

Invero, dalla (3) si deduce facilmente che

$$d\varphi = \frac{-2(1+y^2)\cos\alpha\cdot dy}{1+2\cos 2\alpha\cdot y^2+y^4}, \quad \sqrt{1-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\varphi} = \frac{(1+y^2)\cos\alpha}{\sqrt{1+2\cos 2\alpha\cdot y^2+y^4}}$$

donde segue

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\varphi}} = \frac{-2dy}{\sqrt{1+2\cos 2\alpha\cdot y^2+y^4}},$$

epperò, corrispondendo d'altra parte a $y=0$, $\varphi=\pi/2$, la (2) potrà scriversi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\varphi}}$$

cioè

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1} x^{2n+1} = F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - F(\alpha, \varphi_x), \tag{4}$$

avendo, al solito, posto

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\varphi}}$$

e inoltre

$$\varphi_x = \overline{\operatorname{arctg}}\left[\frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{x} - x\right)\right],$$

dove col simbolo $\overline{\operatorname{arctg}}$ si intende denotare la determinazione dell'arcotangente compresa nel primo quadrante.

Finalmente avvaliamoci, per semplificare la (4), della nota relazione fra funzioni F di argomenti « *complementari* », e cioè del fatto che, se φ e $\dot{\varphi}$ denotano due archi del primo quadrante legati dall'equazione

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\dot{\varphi} \cdot \cos\alpha = 1,$$

si ha

$$F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - F(\alpha, \varphi) = F(\alpha, \dot{\varphi});$$

otteniamo così, in definitiva, la formula assai elegante:

$$\boxed{2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{2n+1} x^{2n+1} = F(\alpha, 2\,\overline{\operatorname{arctg}}\, x), \quad \left(0 \leq x \leq 1,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)} \tag{5}$$

che vale anche per $x = 1$, riducendosi allora alla (1).

La (5), che può anche — al modo di Doetsch — riguardarsi come una nuova equazione generatrice dei polinomi di Legendre, si presta particolarmente bene pel controllo di una tabella di valori numerici dei polinomi di Legendre. Inoltre essa serve anche bene, specie se x non è troppo prossimo ad 1, pel calcolo numerico delle funzioni $F(\alpha, \varphi)$. Per es., per $\alpha = 20^\circ$, $x = 1/2$, la (5) (coi termini fino a quello con P_5) fornisce, con brevissimi calcoli, $F(20^\circ, 2\,\overline{\operatorname{arctg}}\,1/2) = 0{,}94087$ con 5 decimali esatti.

Un'altra formula interessante si ottiene integrando un'altra volta ambo i membri della (5) rispetto a x, fra 0 ed un certo ξ. In particolare per $\xi = 1$ si ha:

$$\boxed{2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{(2n+1)(2n+2)} = K(\sin\alpha) - \log(1 + \sec\alpha), \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)} \tag{6}$$

Questa formula presenta, rispetto alla (1), il vantaggio di una assai più rapida convergenza.

Infine, sottraendo fra loro membro a membro la (1) e la (6), si ha l'altra, più elementare formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_n(\cos 2\alpha)}{n+1} = \log(1 + \sec \alpha), \tag{7}$$

facilmente verificabile per via diretta, partendo dall'equazione generatrice.