Salvatore Cherubino

Le matrici canonizzanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 105–108.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

Le matrici canonizzanti.

Nota di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa).

Sunto. - *Si determinano tutte le matrici che trasformano una matrice assegnata, di conosciute radici caratteristiche, nella forma canonica.*

In queste righe mi propongo di mostrare come i risultati di una mia recente Nota (1) permettano di determinare agevolmente tutte le matrici che portano una matrice A, assegnata e di conosciute radici caratteristiche, alla sua forma canonica C. Tali matrici le dirò « matrici canonizzanti » di A.

Come forma canonica può prendersi sia quella di JORDAN che quella di PREDELLA. Assumerò questa seconda, o meglio una che ne differisce di poco, ultimamente da me ottenuta (2) con procedimento semplice e rapido (3).

1. Per semplicità di esposizione, sarà opportuno riferirsi ad un caso un po' particolare. Consideriamo una matrice A di ordine n, possedente due sole radici caratteristiche distinte, siano α e β, di *indici* (4) rispettivi 3 e 2 e *segnature* (5)

$$(h_2,\ h_1,\ h_0), \quad (k_1,\ k_0).$$

(1) Dal titolo: *Estensione mediante il calcolo di matrici, di alcuni teoremi sulle omografie degli iperspazi.* Scritti matematica offerti a LUIGI BERZOLARI (Pavia, tip. Rossetti, 1936).

(2) Nella Nota dal titolo: *Sulla forma canonica di una matrice* [« Rend. Acc. Lincei », 1936-XIV]. Note I e II.

(3) Un problema analogo a quello in oggetto è stato risoluto, fra tanti altri, restando in un assegnato campo di razionalità contenente gli elementi di A, del CECIONI F.: *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici* [« Annali Sc. Norm. », vol. XI (Pisa, 1909)], cap. II. Vedasi anche NICOLETTI O.: *Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea o di un fascio di forme bilineari* [« Annali di Matem. », t. XIV, s. III (1908)].

(4) SCORZA G.: *Corpi numerici ed Algebre* [Messina, 1921], p. 219.

(5) Ibidem, p. 433.

I numeri h_i e k_j non sono che i numeri del PREDELLA [1], sicchè la *caratteristica* secondo questo Autore, della matrice A, è

$$[(h_2 - 1,\ h_1 - 1,\ h_0 - 1)(k_1 - 1,\ k_0 - 1)].$$

La forma canonica di una tal matrice riesce [2]:

$$C = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha I_{h_0} & I_{h_0} & 0' & 0 & & & \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & I_{h_1} & 0'' & & 0 & \\ \hline & 0 & & \alpha I_{h_2} & & & \\ \hline & & & & \beta I_{k_0} & I_{k_0} & 0''' \\ \cline{5-7} & 0 & & & 0 & \beta I_{k_1} & \end{array}\right)$$

dove I_s indica la matrice identica di ordine s, 0 indica una matrice nulla e le matrici $0'$, $0''$, $0'''$, anch'esse nulle, mancheranno (tutte o parte) qualora si abbia, ordinatamente, $h_0 = h_1$, $h_1 = h_2$ $k_0 = k_1$. In ogni caso si ha:

$$h_0 \leq h_1 \leq h_2; \quad k_0 \leq k_1.$$

Si tratta di determinare tutte le matrici X tali che

(1) $$XAX^{-1} = C,$$

ossia tutte le X non degeneri che verificano la relazione

(2) $$XA = CX.$$

2. Poniamo

$$X = \left(\begin{array}{c} x^{(h_0)} \\ \hline x^{(h_1)} \\ \hline x^{(h_2)} \\ \hline y^{(k_0)} \\ \hline y^{(k_1)} \end{array}\right)$$

ove l'indice in alto indica il numero delle righe di ciascuna matrice parziale, e sostituiamo in (2). Eseguendo i prodotti si ha:

(3) $$\left\{\begin{array}{l} x^{(h_0)} A = \alpha x^{(h_0)} + (I_{h_0} \mid 0')x^{(h_1)} \\ x^{(h_1)} A = \alpha x^{(h_1)} + (I_{h_1} \mid 0'')x^{(h_2)} \\ x^{(h_2)} A = \alpha x^{(h_2)} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y^{(k_0)} A = \beta y^{(k_0)} + (I_{k_0} \mid 0''')y^{(k_1)} \\ y^{(k_1)} A = \beta y^{(k_1)} \end{array}\right.$$

(1) V. la mia Nota I, cit. (2).

(2) Ibidem, Nota II.

relazioni che si scrivono anche

$$(4)\qquad \begin{cases} x^{(h_0)}(A-\alpha I)=(I_{h_0}\,|\,0')x^{(h_1)} \\ x^{(h_1)}(A-\alpha I)=(I_{h_1}\,|\,0'')x^{(h_2)} \\ x^{(h_2)}(A-\alpha I)=0 \\ y^{(k_0)}(A-\alpha I)=(I_{k_0}\,|\,0''')y^{(k_1)} \\ y^{(k_2)}(A-\alpha I)=0 \end{cases}$$

ove I è la matrice identica di ordine n.

La prima di queste relazioni può scindersi in h_0 relazioni nei cui primi membri figureranno, nell'ordine, le h_0 righe di $x^{(h_0)}$ e nei secondi le prime h_0 righe di $x^{(h_1)}$; analogamente la seconda delle (4) si scinde in h_1 relazioni fra le h_1 righe di $x^{(h_1)}$ e le prime h_1 di $x^{(h_2)}$; infine la quarta delle (4) dà k_0 relazioni fra le k_0 righe di $y^{(k_0)}$ e le prime k_0 di $y^{(k_1)}$.

Perciò il sistema (4) equivale a quest'altro

$$(5)\qquad x^{(h_0)}(A-\alpha I)^3=0,\quad x^{(h_1)}(A-\alpha I)^2=0,\quad x^{(h_2)}(A-\alpha I)=0\,;$$

$$(6)\qquad y^{(k_0)}(A-\beta I)^2=0,\quad y^{(k_1)}(A-\beta I)=0,$$

che si ottiene da quello sostituendo la prima equazione nella seconda e poi nella terza, la seconda nella terza e la quarta nella quinta.

Orbene, tenendo presente il significato di segnatura di una matrice rispetto ad una sua radice caratteristica, si ha che

$$h_2,\quad h_2+h_1,\quad h_2+h_1+h_0=\mu_\alpha,$$

sono le nullità delle matrici

$$A-\alpha I,\quad (A-\alpha I)^2,\quad (A-\alpha I)^3,$$

e μ_α la molteplicità di α. Così

$$k_1,\quad k_2+k_0=\mu_\beta,$$

sono le nullità delle matrici

$$A-\beta I,\quad (A-\beta I)^2,$$

e μ_β è la molteplicità di β. Infine si tenga presente che $\mu_\alpha+\mu_\beta=n$.

Perciò, le soluzioni delle equazioni

$$x(A-\alpha I)^s=0,\qquad (s=1,2,3);$$

$$y(A-\beta I)^r=0,\qquad (r=1,2);$$

ove x, y indicano due n–complessi orizzontali incogniti, i cui elementi s'interpretino come coordinate di punti in uno spazio proiettivo complesso S_{n-1}, riempiono gli spazi subordinati di questo [1]:

$$(7)\qquad S_{\alpha,1},\quad S_{\alpha,2},\quad S_{\alpha,3}\,;\qquad S_{\beta,1},\quad S_{\beta,2},$$

[1] Gli spazi $S_{\alpha,1}$, $S_{\beta,1}$ son quelli fondamentali dell'omografia di modulo A.

di dimensioni rispettive $h_2 - 1$, $h_2 + h_1 - 1$, $h_2 + h_1 + h_0 - 1 = \mu_\alpha - 1$; $k_1 - 1$, $k_1 + k_0 - 1 = \mu_\beta - 1$.

Orbene [1], i primi tre spazi (7) sono ciascuno contenuto nel successivo, così il quarto è contenuto nel quinto; e ciascuno dei primi tre è indipendente da ciascuna degli ultimi due [2].

Le (5)-(6) ci dicono che le righe delle matrici $x^{(h_s)}$, $y^{(k_r)}$ danno altrettanti punti degli spazi (7), onde, perchè X risulti non degenere, occorre e basta che detti punti siano tutti indipendenti il che è possibile ottenere in base a quanto ora è stato ricordato.

Si conclude che, a meno di un fattore di proporzionalità *variabile da una riga all'altra:*

le matrici $x^{(h_2)}$ sono quante le possibili scelte di h_2 punti indipendenti di $S_{\alpha,1}$, cioè $\infty^{h_2(h_2-1)}$;

le matrici $x^{(h_1)}$ sono quante le possibili scelte di h_1 punti di $S_{\alpha,2}$ indipendenti tra loro e dai precedenti, cioè $\infty^{h_1(h_1-1)}$;

le matrici $x^{(h_0)}$ sono quante le possibili scelte di h_0 punti di $S_{\alpha,3}$ indipendenti tra loro e dai precedenti, cioè $\infty^{h_0(h_0-1)}$;

le matrici $x^{(k_1)}$ sono quante le possibili scelte di k_1 punti indipendenti di $S_{\beta,1}$, cioè $\infty^{k_1(k_1-1)}$;

le matrici $x^{(k_0)}$ sono quante le possibili scelte di k_0 punti di $S_{\beta,2}$ indipendenti tra loro e dai precedenti, cioè $\infty^{k_0(k_0-1)}$.

In definitiva, l'ordine di infinità delle matrici X richieste è dato dalla somma

$$n + h_2(h_2-1) + h_1(h_1-1) + h_0(h_0-1) + k_1(k_1-1) + k_0(k_0-1) =$$
$$= h_2^2 + h_1^2 + h_0^2 + k_1^2 + k_0^2.$$

È ovvio in che modo si procede nel caso generale e come si perviene al seguente risultato:

Se la matrice A *possiede* m *radici caratteristiche distinte con le segnature rispettive*

$$\left(h_{i_r}^{(r)},\ h_{i_r-1}^{(r)}, \dots,\ h_0^{(r)}\right) \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

le matrici canonizzanti di A *costituiscono un insieme infinito di dimensione* [3]

$$\sum h^2 = \sum_{r=1}^{m} \left(h_{i_r}^{(r)2} + h_{i_r-1}^{(r)2} + \dots + h_0^{(r)2}\right).$$

(1) Nota cit. 1), n. 7.

(2) Ibidem, n. 8.

(3) È questa la formola che si trova in BERTINI E.: *Introduzione alla geometria proiettiva degl'iperspazi* [Pisa, Spoerri, 1907], pag. 91, salvo la differenza di un'unità dovuta al che nelle equazioni di un'omografia compare un fattore di proporzionalità arbitrario che per noi va computato.