BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALESSANDRO TERRACINI

Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 109–112.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

Sunto. - *In relazione coll'estensione data recentemente dall'A. alla teoria dell'invariante di* MEHMKE-SEGRE, *si interpreta in tale ordine di idee l'invariante proiettivo delle congruenze di rette studiato dal* BUZANO *e dal* BOMPIANI.

1. In un mio recente lavoro [1], del quale richiamo qui brevemente quanto è necessario per la comprensione di questa Nota, ho assegnato una estensione del notissimo invariante proiettivo di contatto di MEHMKE (rapporto delle curvature di due ipersuperficie di uno stesso spazio in un loro punto di contatto) invariante di cui CORRADO SEGRE ha assegnata un'interpretazione proiettiva limitatamente al caso di due curve piane, riconducendolo alla nozione di birapporto. L'idea da me seguita è questa: per una corrispondenza *di tipo dualistico* fra due spazi a r dimensioni, S_r e S_r' (la quale dunque associ ai singoli punti P del primo spazio gli iperpiani π_{r-1} del secondo) si può considerare in ogni punto P del primo spazio una *densità*, cioè un numero atto a misurare localmente l'addensarsi degli iperpiani di S_r' corrispondenti ai punti prossimi a P, intorno all'iperpiano π_{r-1} [2]. Ora nel mio lavoro citato ho osservato che in qualche caso particolare la densità così definita acquista il significato geometrico di curvatura: così senz'altro se la corrispondenza dualistica ha luogo

[1] *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 71, 1936.

[2] La densità di una tale corrispondenza fu definita dal TRICOMI (*Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo*, « Rend. Lincei », serie 6ª, vol. XIII, 1931; cfr. anche *« Densità » di un continuo di punti o di rette e « densità » di una corrispondenza*, ibid., vol. XXIII, 1° semestre 1936) in modo algoritmico, mediante la formola

$$(*) \qquad \delta = \frac{d(u_1, \ldots, u_r)}{d(x_1, \ldots, x_r)} \left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \right)^{-\frac{r+1}{2}}$$

dove — rispetto ad assi ortogonali in S_r e S_r' — le u_i sono le coordinate dell'iperpiano di S_r' corrispondente al punto dello S_r avente coordinate $x_1, \ldots, x_r$; le u_i sono normate in modo che il termine noto dell'equazione di quell'iperpiano risulta eguale all'unità. Una interpretazione geometrica della densità si trova nel mio lavoro citato nella nota precedente.

fra uno S_r e uno S_r' sovrapposti, ed è definita, a partire da un arbitrario sistema ∞^1 di ipersuperficie, facendo corrispondere a ogni punto l'iperpiano in esso tangente alla ipersuperficie del sistema che vi passa. Così ancora nella polarità rispetto a una ipersuperficie algebrica d'ordine n Φ^n_{r-1}, e precisamente associando è ogni punto generico il suo iperpiano polare, la densità della corrispondenza, calcolata in un punto generico appartenente alla Φ^n_{r-1} coincide con la curvatura della Φ^n_{r-1} in questo stesso punto, a meno del fattore numerico $-(n-1)$ [1]. Data questa analogia era facile presumere che si potesse giungere a estendere l'invariante di contatto di MEHMKE al caso in cui si considerano fra due S_r due corrispondenze C, $\overline{C}$ di tipo dualistico, che entrambe facciano corrispondere a un certo punto P uno stesso iperpiano: effettivamente io ho dimostrato nel lavoro citato che il rapporto $i = \delta/\overline{\delta}$ delle densità in P delle due corrispondenze C, $\overline{C}$ è un invariante proiettivo, e ne ho inoltre assegnato una interpretazione proiettiva in un ordine di idee analogo a quello che aveva seguito C. SEGRE per l'invariante di MEHMKE nel caso particolare di due curve piane tangenti in un punto.

Nella medesima Nota ho osservato (n. 10) un risultato iperspaziale che, particolarizzato per il caso dello S_3 asserisce quanto segue. Proiettiamo da un centro generico O su un piano π generico i punti di una superficie, e seghiamo col piano π i relativi piani tangenti; nasce così su π una corrispondenza di tipo dualistico che chiamiamo *indotta* da quella superficie sul piano π rispetto al centro O [2]. Allora, *per due superficie dello spazio ordinario il rapporto delle loro curvature totali in un punto* P *ove*

(1) Ciò permette dunque di considerare la curvatura p. es. di una linea piana algebrica anche nei punti del suo piano non situati sulla linea. Per una conica, come ho osservato nella mia Nota citata, risulta allora che la curvatura in un punto M non appartenente alla conica continua ad essere data dal quadrato del semiparametro diviso per il cubo della « normale » in M, cioè del segmento intercetto fra M e l'asse focale della normale condotta dal punto M alla sua retta polare.

(2) Colgo l'occasione per aggiungere qual'è la condizione necessaria e sufficiente affinchè, prefissata in un piano una corrispondenza C di tipo dualistico, esista in uno S_3 ambiente una superficie che induca su quel piano tale corrispondenza. La condizione consiste in ciò, che la proiettività subordinata dalla corrispondenza C fra le direzioni uscenti da un punto generico P e i punti della corrispondente retta p abbia carattere involutorio. La necessità della condizione è ovviamente presumibile in base alla teoria delle tangenti coniugate: comunque necessità e sufficienza risultano con un calcolo che non offre difficoltà.

ammettano il medesimo piano tangente coincide con l'invariante proiettivo i, *calcolato nel punto proiezione di* P, *delle due corrispondenze dualistiche da esse indotte su un piano generico, rispetto a un centro generico.*

Nel presente lavoro, sviluppate alcune osservazioni su una coppia di corrispondenze dualistiche in uno stesso piano, giungo a un'interpretazione assai semplice, e analoga a quella ora citata per le superficie, dell'invariante proiettivo relativo a una retta generica di una congruenza che è stato recentemente considerato dal BUZANO e dal BOMPIANI [1].

2. Osserviamo anzitutto che *se due coniche hanno in un punto* P *contatto quadripunto, esse hanno la medesima curvatura non soltanto in* P *ma in ogni punto della retta tangente comune* (cfr. per la nozione di curvatura la nota [1] a p. 110). Ciò si controlla senza difficoltà, avuto riguardo all'espressione (*) della densità indicata in una precedente nota a piè di pagina, ove si considerino le polarità relative alle coniche del fascio determinato da una conica irriducibile insieme con la tangente nel suo punto P contata due volte. Il risultato equivale poi a quest'altro: *dati in un piano due punti* A, B *e due rette* a, b *non passanti per essi, se il punto* P $\equiv$ ab *appartiene alla retta* p $\equiv$ AB, *le* ∞^1 *polarità ordinarie* — che indichiamo brevemente con $(AaBb)$ — *in ciascuna delle quali i punti* A, B *hanno rispettivamente come rette polari le* a, b *hanno in ogni singolo punto della retta* p *la medesima densità.* Del resto questo risultato si stabilisce anche per via sintetica, ricorrendo al significato geometrico dianzi ricordato per la curvatura di una conica anche in un punto non appartenente ad essa. Invero (limitandoci qui al caso generale in cui il punto P non è vertice comune per le ∞^1 coniche fondamentali; l'eventualità esclusa si studia direttamente senza difficoltà) gli assi delle coniche fondamentali delle ∞^1 polarità $(AaBb)$ toccano una parabola γ (tangente alla retta p) coincidente con quella inviluppata dalle normali condotte dai singoli punti della retta p alle loro rette polari; cosicchè i segmenti di queste normali compresi fra quei punti e l'asse focale di una di quelle ∞^1 coniche variano in uno stesso rapporto al variare di quest'ultima conica. Ma siccome in particolare nel punto P quelle ∞^1 coniche hanno ovviamente la stessa curvatura, tale

[1] P. BUZANO, *Invariante proiettivo di una particolare coppia di elementi di superficie,* questo « Bollettino », vol. XIV, 1935; E. BOMPIANI, *Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del secondo ordine,* ibid..

eguaglianza di curvature si estende in tal modo a ogni altro punto della retta p.

Ciò premesso, siano C e $\overline{C}$ due corrispondenze di tipo dualistico in un medesimo piano; e tra le coppie di elementi Aa corrispondentisi in C e le coppie Bb corrispondentisi in $\overline{C}$ sia posto un riferimento tale che la retta $p \equiv AB$ passi costantemente per il punto $P \equiv ab$ (1). Allora è chiaro che, presi due punti omologhi in tale riferimento A e B, resta ben definito il valore i_A dell'invariante proiettivo i calcolato in A per la corrispondenza C e per una qualunque delle ∞^1 polarità $(AaBb)$. Analogamente resta definito i_B dalla corrispondenza $\overline{C}$ in relazione col punto B. *Due corrispondenze dualistiche* C, $\overline{\mathrm{C}}$ *in uno stesso piano riferite fra loro in modo che punti omologhi* A, B *siano allineati sul punto intersezione delle rette corrispondenti* a, b *definiscono dunque i due invarianti proiettivi* $\mathrm{i_A}$, $\mathrm{i_B}$ *in ogni coppia di punti omologhi.*

3. A un riferimento fra due corrispondenze di tipo dualistico C, $\overline{C}$ nelle condizioni testè considerate si giunge in particolare quando si parte da una congruenza rettilinea generica Γ, con falde focali non degeneri nè sviluppabili, e presi un centro di proiezione generico O e un piano generico π, si costruiscono le due corrispondenze dualistiche C, $\overline{C}$ così *indotte* (n. 1) dalle due falde focali della congruenza. Ebbene, *se* A, B *sono le due proiezioni sul piano* π *dei due fuochi di un raggio della congruenza* Γ, *il prodotto* $\mathrm{i_A i_B}$ *degli invarianti proiettivi* $\mathrm{i_A}$, $\mathrm{i_B}$ *relativi alle due corrispondenze dualistiche* C, $\overline{\mathrm{C}}$ *calcolati nei punti* A, B *a norma del n.° precedente, coincide con l'invariante proiettivo* J *studiato dal Buzano* (2). L'interpretazione di tale invariante viene così ricondotta a quella da me data nella mia Nota citata.

Il risultato si può stabilire adottando — come è lecito per il carattere noto *a priori* di invarianza proiettiva di i_A, i_B — il centro di proiezione O coincidente col punto all'infinito dell'asse z della terna ortogonale xyz, e il piano $\pi \equiv xy$. Se $z = f(x, y)$, e $z = g(x, y)$ sono le equazioni delle falde focali delle congruenze, il riferimento tra i due punti $A(x, y, 0)$ e $B(x_1, y_1, 0)$ è dato dalle

$$g(x_1, y_1) - f(x, y) = p(x_1 - x) + q(y_1 - y) = p_1(x_1 - x) + q_1(y_1 - y)$$

(1) Se le corrispondenze C, $\overline{C}$ sono arbitrarie e per fissare le idee analitiche, si può ancora scegliere in infiniti modi il riferimento fra le loro coppie in modo che sussista la proprietà indicata.

(2) In realtà $J = 16I$, dove I è l'invariante studiato dal Buzano. Ma anche in altre questioni conviene sostituire J alla considerazione di I.

con $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $p_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=x_1,\, y=y_1}$, ecc. Posto ancora $r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, ecc.; il prodotto della densità δ, δ_1 delle due corrispondenze rispettivamente in A, B è

$$\delta\delta_1 = f(x, y)\, g(x_1, y_1) \frac{(rt - s^2)(r_1 t_1 - s_1{}^2)}{(p^2 + q^2)^{3/2}(p_1{}^2 + q_1{}^2)^{3/2}}.$$

Perciò, ricordando che, secondo il lavoro citato del BUZANO, J è il prodotto delle curvature totali delle due falde calcolate nei punti A_1, B_1 che si proiettano in A, B, moltiplicato per $\overline{A_1B_1}^4$ e diviso per sen$^4\,\omega$, dove ω è l'angolo dei piani tangenti alle due falde in A_1, B_1, segue

$$J = \delta\delta_1 \frac{(p^2 + q^2)^{3/2}(p_1{}^2 + q_1{}^2)^{3/2}}{f(x, y)\, g(x_1, y_1)} \cdot \left(\frac{y_1 - y}{p_1 - p}\right)^4.$$

D'altro lato, calcolato il prodotto delle densità δ', δ_1' rispettivamente in A, B di una delle ∞^1 polarità $(AaBb)$, risulta un valore tale che il confronto con l'ultima equazione scritta porge appunto $J = \frac{\delta\delta_1}{\delta'\delta_1'} = i_A i_B$.