Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Armando Chiellini

Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del terzo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 113–118.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_113_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

Applicazione della teoria degli invarianti differenziali lineari alla integrazione delle equazioni differenziali lineari del terzo ordine.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *Mediante la teoria degli invarianti differenziali lineari, si determinano tutte le classi di equazioni differenziali lineari del 3° ordine la cui integrazione si riconduce a quella di equazioni differenziali, pure del 3° ordine, a coefficienti costanti e si distinguono i casi in cui tale riduzione si effettua mediante sole quadrature o mediante la risoluzione di una equazione di* RICCATI.

§ 1. Richiamo della teoria degli invarianti differenziali lineari. — 1°) L'integrazione di un'equazione differenziale lineare autoaggiunta del 3° ordine, com'è ben noto, si riconduce a quella dell'equazione a coefficienti costanti $z''' = 0$ [1], purchè si sappia

[1] SCHLESINGER, *Handbuch der theorie der linearen Differentialgleichungen*, vol. 2°, pag. 201 e segg. (Lipsia, Teubner); CHIELLINI, *Alcune proprietà caratteristiche delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari del 3° e 4° ordine*, autoaggiunte. (« Giornale di Mat. del Battaglini », 1934)

integrare un'opportuna equazione differenziale lineare del 2° ordine; lo scopo del presente lavoro è quello di determinare tutti i tipi di equazioni lineari del 3° ordine per cui avviene una circostanza analoga, cioè a dire tutti i tipi la cui integrazione è ricondotta a quella di equazioni a coefficienti costanti, mediante l'integrazione di un'equazione differenziale lineare di ordine inferiore o semplici quadrature.

Tale risultato fu già parzialmente ottenuto dall'HALPHEN, in un caso particolare, nel suo lavoro fondamentale sulla ricerca degli invarianti differenziali per le equazioni del 3° e 4° ordine.

Ci sarà utile richiamare, limitatamente alle equazioni lineari del 3° ordine, alcuni risultati relativi a detti invarianti, rimandando per notizie più generali, all'opera fondamentale del WILCZYNSKI [1], dove tra l'altro è riportato il procedimento dell'HALPHEN che consiste nel supporre l'invariante lineare $\theta_3 = 1$, sotto la quale ipotesi, il risultato diventa quasi immediato.

2°) Presa l'equazione del 3° ordine sotto la forma ridotta

$$y''' + 3p_2 y' + p_3 y = 0, \tag{1}$$

essa ammette un solo invariante (relativo) differenziale lineare fondamentale

$$\theta_3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2',$$

nel senso che ogni altro invariante (relativo o assoluto) è funzione di esso e della sua così detta *quadriderivata*

$$\theta_8 = 6\theta_3\theta_3'' - 7\theta_3'^2 - 27 p_2 \theta_3^2,$$

dove gli apici, ora e nel seguito, indicano simbolo di derivazione. Da questi due invarianti si ottiene poi l'invariante di peso 12, mediante il così detto metodo jacobiano,

$$\theta_{12} = 3\theta_3\theta_8' - 8\theta_8\theta_3'.$$

L'equazione (1) ammetterà poi un solo *invariante assoluto* fondamentale, che indicheremo con J, dato da

$$J = \frac{\theta_8^3}{\theta_3^8}.$$

Per l'equazione a coefficienti costanti è $J = \text{cost}$ (eventualmente anche $= \infty$): è dunque questa la condizione perchè, mediante una sostituzione, l'equazione del 3° ordine possa ricondursi ad una con coefficienti costanti; escluso allora il caso di $\theta_3 = 0$ (che richiederà

(1) WILCZYNSKI, *Proiective differential Geometry of curves and ruled surfaces* (Lipsia, Teubner).

un esame a parte), dall'ipotesi $J=k$, si deduce $\theta_8{}^3=k\theta_3{}^8$ da cui, derivando

$$3\theta_8{}'\theta_3=8\theta_8\theta_3{}',$$

e quindi $\theta_8=0$ oppure $\theta_{12}=0$. D'altra parte se è $\theta_8=0$ oppure $\theta_3=0$ è anche $\theta_{12}=0$ e quindi possiamo dire che la condizione affinchè l'equazione sia riducibile a coefficienti costanti è che $\theta_{12}=0$.

§ 2. **Risoluzione della quistione proposta.** — Vogliamo mostrare che la determinazione della sostituzione che effettua tale riduzione, se $\theta_3 \neq 0$ si ottiene mediante quadrature, mentre $\theta_3=0$ richiede la risoluzione di un'equazione di RICCATI (o ciò che è lo stesso, di una del secondo ordine).

A questo scopo, eseguiamo sopra la (1) una sostituzione di variabile indipendente e di funzione incognita, col porre

$$y(x)=\lambda(z)\cdot z(x), \quad \xi=\varphi(x);$$

avremo senz'altro

$$\xi'^3\frac{d^3z}{d\xi^3}+3\xi'\left(\xi''+\frac{\lambda'\xi'}{\lambda}\right)\frac{d^2z}{d\xi^2}+\left(\xi'''+\frac{3\lambda'\xi''}{\lambda}+\frac{3\lambda''\xi'}{\lambda}+3p_2\xi'\right)\frac{dz}{d\xi}+$$
$$+\left(p_3+3p_2\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda'''}{\lambda}\right)z=0.$$

Si debbono scegliere λ e φ in modo che questa equazione risulti a coefficienti costanti: notoriamente si può supporre $=0$ il secondo coefficiente e perciò

$$\frac{\xi''}{\xi'}=-\frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Allora indicando con η l'espressione $\frac{\xi''}{\xi'}$ ed osservando che risulta

$$\frac{\xi'''}{\xi'}=\eta'+\eta^2, \quad \frac{\lambda''}{\lambda}=-\eta'+\eta^2, \quad \frac{\lambda'''}{\lambda}=-\eta''+3\eta\eta'-\eta^3,$$

ne segue per l'equazione trasformata

$$\frac{d^3z}{d\xi^3}+\frac{1}{\xi'^2}(-2\eta'+\eta^2+3p_2)\frac{dz}{d\xi}+ \tag{2}$$
$$+\frac{1}{\xi'^3}(-\eta''+3\eta\eta'-\eta^3-3p_2\eta+p_3)z=0.$$

Volendo che la (2) risulti a coefficienti costanti, dovrà essere

$$\frac{-2\eta'+\eta^2+3p_2}{\xi'^2}=\text{cost.}, \quad \frac{-\eta''+3\eta\eta'-\eta^3-3p_2\eta+p_3}{\xi'^3}=\text{cost.},$$

cioè derivando:

$$(3)\qquad \begin{cases} -2\eta(-2\eta' + \eta^2 + 3p_2) - 2\eta'' + 2\eta\eta' + 3p_2' = 0, \\ -3\eta(-\eta'' + 3\eta\eta' - \eta^3 - 3p_2\eta + p_3) - \\ \qquad -\eta''' + 3\eta\eta'' + 3\eta'^2 - 3p_2\eta' - 3p_2\eta' + p_3' = 0. \end{cases}$$

Si hanno così due equazioni differenziali nella funzione incognita η e noi ora andiamo a stabilire la condizione affinchè abbiano una soluzione comune. Derivando la prima ed introducendo nella seconda risulta intanto

$$3\eta\eta'' - 9\eta^2\eta' - 3p_3\eta + 9p_2\eta^2 + 3\eta^4 + \theta_3' = 0.$$

Uguagliando ora il valore di η'' che si ottiene da questa con quello che si ottiene dalla prima delle (3), otteniamo, con semplici riduzioni

$$(4)\qquad 3\theta_3\eta - \theta_3' = 0,$$

che è la condizione cercata. Se $\theta_3 \neq 0$, otteniamo

$$(5)\qquad \eta = \frac{\theta_3'}{3\theta_3},$$

cioè, integrando

$$(6)\qquad \xi' = k\sqrt[3]{\theta_3}; \qquad (k = \text{cost.})$$

mediante le (5) e (6) si calcola effettivamente la (2) e la trasformazione risulta eseguita.

Possiamo intanto concludere che *le equazioni lineari del 3° ordine, per le quali, essendo $\theta_3 \neq 0$, risulta nullo l'invariante lineare θ_{12}, sono riducibili ad equazioni a coefficienti costanti e tale riduzione si effettua mediante derivazioni e quadrature.*

4°) Resta da esaminare ora il caso escluso di $\theta_3 = 0$. Sotto questa ipotesi la (4) diventa illusoria; ma possiamo procedere così: rendiamo nullo il coefficiente di $\frac{dz}{d\xi}$ risolvendo l'equazione di RICCATI

$$(7)\qquad \eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}p_2,$$

con ciò il coefficiente di z diviene

$$\frac{1}{\xi'^3}(p_3 - 3p_2\eta - \eta^3 + 3\eta\eta' - \eta'') = \frac{1}{\xi'^3}\left(p_3 - \frac{3}{2}p_2'\right) = \frac{\theta_3}{\xi'^3} = 0,$$

e l'equazione trasformata si riduce a

$$z''' = 0.$$

Osservando ora che l'ipotesi $\theta_3 = 0$ caratterizza le equazioni autoaggiunte possiamo dire che *le equazioni autoaggiunte sono* *anch'esse riducibili ad equazioni a coefficienti costanti; ma tale riduzione si effettua mediante l'integrazione di un'equazione di Riccati, cioè di una equazione lineare del 2° ordine.*

5°) Raccogliendo i due precedenti risultati, possiamo quindi enunciare il risultato generale:

Tutte e sole le equazioni lineari del 3° ordine, il cui invarinnte

$$\theta_{12} = 3\theta_3\theta_8 - 8\theta_8\theta_3'$$

è nullo, sono riducibili ad equazioni a coefficienti costanti. Se $\theta_3 \neq 0$, *tale riduzione si effettua mediante quadrature col porre*

$$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(z), \quad \eta = \frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\theta_3'}{3\theta_3};$$

se invece $\theta_3 = 0$ *la riduzione si effettua col porre*

$$y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x), \quad \eta = \frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{\lambda'}{\lambda}$$

dove η *è una soluzione dell'equazione* $\eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}p_2$.

6°) Osservazioni: *a)* Non è inutile osservare che se l'equazione di partenza è del tipo di Fuchs di 1ª specie:

$$y''' + \frac{3a}{x^2}y' + \frac{b}{x^3}y = 0,$$

il precedente procedimento ci dà la classica sostituzione che si usa in tal caso per ricondurci ad un'equazione a coefficienti costanti.

b) Se la funzione incognita η, oltre che soddisfare alla condizioue (5), soddisfa anche alla (7) si ottiene per θ_3 la condizione

$$6\theta_3\theta_3'' - 7\theta_3'^2 - 27p_2\theta_3^2 = 0$$

cioè $\theta_8 = 0$ e viceversa; cioè se $\theta_8 = 0$, l'equazione di Riccati

$$\eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}p_2$$

ammette l'integrale $\frac{\theta_3'}{3\theta_3}$. Concludendo:

Se $\theta_3 = 0$, le equazioni si riducono a coefficienti costanti, a meno di un'equazione lineare del 2° ordine; se $\theta_8 = 0$ (senza esserlo θ_3), le equazioni si riducono a coefficienti costanti della forma $z''' + az = 0$, a meno di quadrature; se $\theta_{12} = 0$ (senza esserlo θ_8), le equazioni si riducono a coefficienti costanti della forma $z''' + az' + bz = 0$, a meno di quadrature.

c) La forma generale delle equazioni, il cui θ_{12} è nullo, è data da

$$(8) \qquad y''' + 3p_2 y + \left(\frac{3}{2}p_2' + ke^{3\int \eta dz}\right) y = 0, \qquad (k = \text{cost.})$$

dove η è soluzione di

$$\eta'' = 3\eta\eta' - \eta^3 - 3p_2\eta + \frac{3}{2}p_2',$$

mentre di quelle per cui è già $\theta_8 = 0$, η è soluzione di

$$\eta'' = \eta\eta' + \frac{3}{2}p_2' \quad \text{cioè} \quad \eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}p_2.$$

Infine la forma di quelle per cui è $\theta_3 = 0$ (autoaggiunte), è data da

$$y''' + 3p_2y' + \frac{3}{2}p_2' = 0,$$

che si ricava dalla precedente per $k = 0$.