Basilio Manià

Una osservazione sui sistemi differenziali lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 118–122.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_118_0>

Una osservazione sui sistemi differenziali lineari [1].

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostra una proprietà delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari e se ne fa applicazione alle equazioni delle estremanti dei problemi di* LAGRANGE.

Mi propongo qui di dimostrare una proprietà di certe soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari della forma

$$y_i'(x) = A_{i1}(x)y_1(x) + \dots + A_{in}(x)y_n(x), \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Di questa proprietà faccio poi uso per semplificare le equazioni delle estremanti dei problemi di LAGRANGE da me altrove [2] ottenute, dimostrando che un termine che compare in quelle equazioni è identicamente nullo e quindi costituisce una inutile, benchè soltanto apparente, complicazione delle dette equazioni.

1. La proprietà a cui hò accennato sopra è espressa dal seguente TEOREMA. — *Sieno* $A_{ik}(x)$, $(i, k = 1, \dots, n)$ n^2 *funzioni continue in un intervallo* (a, b):

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange*, « Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », serie II, vol. V (1936); *Le equazioni delle estremanti nel problema di Lagrange*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie VI, vol. XXIII (1936).

per ξ *fissato comunque in* (a, b) *e* x *variabile in questo intervallo, le funzioni della riga* r*-sima del quadro*

$$
(2) \quad \left\{\begin{array}{l}
y_{11}(x, \xi),\ y_{12}(x, \xi), \ldots,\ y_{1n}(x, \xi) \\
y_{21}(x, \xi),\ y_{22}(x, \xi), \ldots,\ y_{2n}(x, \xi) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n1}(x, \xi),\ y_{n2}(x, \xi), \ldots,\ y_{nn}(x, \xi)
\end{array}\right.
$$

rappresentino la soluzione del sistema differenziale (1) *determinata dalle condizioni*

$$y_{rs}(\xi, \xi) = \delta_{rs} \text{ [1]}.$$

Allora le funzioni della colonna s*-sima del quadro* (2), *per* x *fissato in* (a, b) *e* ξ *variabile nello stesso intervallo, rappresentano la soluzione del sistema differenziale lineare*

$$(3) \qquad y_i'(\xi) = - A_{1i}(\xi) y_1(\xi) - \ldots - A_{ni}(\xi) y_n(\xi)$$

determinata dalle condizioni

$$y_{rs}(x, x) = \delta_{rs}.$$

Consideriamo le funzioni di x

$$y_{r1}(x, \xi), \ldots, \quad y_{rn}(x, \xi); \quad y_{r1}(x, \xi + \Delta\xi), \ldots, \quad y_{rn}(x, \xi + \Delta\xi), \quad (r = 1, \ldots, n)$$

essendo ξ e $\xi + \Delta\xi$ due punti distinti dell'intervallo (a, b).

Poichè ogni soluzione

$$y_1(x), \ldots, \quad y_n(x)$$

del sistema differenziale (1) si può scrivere nella forma

$$y_i(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\xi + \Delta\xi) y_{\nu i}(x, \xi + \Delta\xi),$$

si ha

$$y_{rs}(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{n} y_{r\nu}(\xi + \Delta\xi, \xi) y_{\nu s}(x, \xi + \Delta\xi);$$

e quindi, tenendo anche conto delle condizioni

$$y_{r\nu}(\xi, \xi) = \delta_{r\nu},$$

$$y_{rs}(x, \xi + \Delta\xi) - y_{rs}(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \{ y_{r\nu}(\xi, \xi) - y_{r\nu}(\xi + \Delta\xi, \xi) \} y_{\nu s}(x, \xi + \Delta\xi).$$

Dividiamo per $\Delta\xi$ i due membri di questa equazione e facciamo tendere $\Delta\xi$ a zero, osservando che

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{y_{r\nu}(\xi + \Delta\xi, \xi) - y_{r\nu}(\xi, \xi)}{\Delta\xi} = A_{\nu 1}(\xi) y_{r1}(\xi, \xi) + \ldots + A_{\nu n}(\xi) y_{rn}(\xi, \xi) = A_{\nu r}(\xi).$$

[1] Qui δ_{rs} è il simbolo di KRONECKER che sta a indicare lo zero per $r \neq s$ e l'unità per $r = s$.

Otteniamo così

$$\frac{\partial y_{rs}(x, \xi)}{\partial \xi} = -\sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu r}(\xi) y_{\nu s}(x, \xi),$$

cioè il teorema che si voleva dimostrare.

Osservazione. — Se le funzioni A_{ik} non sono continue nell'intervallo (a, b), ma soltanto misurabili e integrabili secondo Lebesgue, si deve intendere che gli integrali del sistema (1) sono le n-uple di funzioni assolutamente continue che soddisfano a tale sistema ad esclusione dei punti di un insieme di misura nulla E. Poichè il sistema (1) è lineare e quindi ogni integrale di esso si può dare come combinazione a coefficienti costanti di n integrali indipendenti, l'insieme E può essere determinato in modo unico per tutti gli integrali del sistema.

Dopo ciò la dimostrazione fatta si può ripetere anche nel caso delle $A_{ik}(x)$ misurabili e integrabili secondo Lebesgue sull'intervallo (a, b), purchè il punto ξ fissato non appartenga all'insieme E.

2. Manteniamo le notazioni e le ipotesi del teorema precedente e sieno $B_i(x)$, $(i = 1, \dots, n)$, n funzioni continue nell'intervallo (a, b) chiuso. Poniamo quindi

$$z_i(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\xi}^{b} B_\nu(\tau) y_{i\nu}(\tau, \xi) d\tau, \qquad (i = 1, \dots, n),$$

e deriviamo rispetto a ξ i due membri di questa equazione. Si ottiene allora, per il teorema precedente,

$$\frac{dz_i(\xi)}{d\xi} = -B_i(\xi) + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\xi}^{b} B_\nu(\tau) \frac{\partial y_{i\nu}(\tau, \xi)}{\partial \xi} d\tau =$$

$$= -B_i(\xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\xi}^{b} \left\{ B_\nu(\tau) \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu i}(\xi) y_{\mu\nu}(\tau, \xi) \right\} d\tau =$$

$$= -B_i(\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu i}(\xi) \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\xi}^{b} B_\nu(\tau) y_{\mu\nu}(\tau, \xi) d\tau =$$

$$= -B_i(\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu i}(\xi) z_\mu(\xi).$$

Valgono dunque le identità

$$(4) \qquad \frac{dz_i(\xi)}{d\xi} + \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu i}(\xi) z_\mu(\xi) + B_i(\xi) \equiv 0, \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Osservazione. — Se invece di essere continue in tutto l'intervallo (a, b) le funzioni $A_{ik}(x)$, $B_i(x)$ sono soltanto misurabili e limitate, il ragionamento fatto e l'identità (4) che ne deriva valgono ancora in quasi tutto il detto intervallo. Se le funzioni $A_{ik}(x)$, $B_i(x)$ sono illimitate ma integrabili, la identità (4) vale ancora in quasi tutto l'intervallo (a, b) purchè sia lecita la derivazione rispetto a ξ che sopra abbiamo eseguita.

3. Nella mia Nota lincea sopra le equazioni delle estremanti nel problema di Lagrange ho dimostrato che se

$$C_0: \qquad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \qquad\qquad 0 \leq s \leq L_0$$

è una estremante di un problema di Lagrange relativo a un sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u_1' = F_1(x, y, x', y', u_1, \dots, u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n' = F_n(x, y, x', y', u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

e a un integrale

$$I_C = \int\limits_C G(x, y, x', y', u_1, \dots, u_n)\, ds,$$

essa soddisfa alle equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^s \left[\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_\beta} + \lambda_\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial u_\beta} + \lambda'_\beta\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial x}\right] ds - \frac{d}{ds}\int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial x'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'}\right) ds = c_1 \,(\text{cost.}) \\ \displaystyle\int_0^s \left[\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_\beta} + \lambda_\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial u_\beta} + \lambda'_\beta\right) \frac{\partial F_\beta}{\partial y}\right] ds - \frac{d}{ds}\int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial y'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y'}\right) ds = c_2 \,(\text{cost.}) \end{cases}$$

dove

$$\lambda_r(s) = \int_s^{L_0} \frac{\partial G[x_0(\sigma), \dots, u_m(\sigma)]}{\partial u_\alpha} \lambda_{r\alpha}(s, \sigma)\, d\sigma, \qquad (r = 1, \dots, n),$$

essendo $(\lambda_{r1}(s, \sigma), \dots, \lambda_{rn}(s, \sigma))$ la soluzione del sistema differenziale lineare

$$z_r'(\sigma) = \frac{\partial F_r[x_0(\sigma), \dots, u_m(\sigma)]}{\partial u_\alpha} z_\alpha(\sigma)$$

determinata dalle condizioni

$$\lambda_{rj}(s, s) = \delta_{rj};$$

e dove gli indici rappresentati con lettere greche si intendono usati come nel calcolo tensoriale così che, per esempio,

$$\lambda_\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial u_\beta} = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial u_\beta}.$$

Se applichiamo ora i risultati dei nn.ⁱ 1 e 2 vediamo immediatamente che

$$\lambda'_\beta + \lambda_\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial u_\beta} + \frac{\partial G}{\partial u_\beta} \equiv 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

e quindi le (4) si possono scrivere

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \right) ds - \frac{d}{ds} \int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial x'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \right) ds = c_1 \text{ (cost.)} \\ &\int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} \right) ds - \frac{d}{ds} \int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial y'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y'} \right) ds = c_2 \text{ (cost.)}. \end{aligned} \right. \tag{5*}$$

4. Nel caso $n = 1$, considerato nella mia Memoria degli « Annali della Scuola Normale » citata, la verifica della (6) si può fare immediatamente senza ricorrere ai risultati del nn.ⁱ 1 e 2.

5. La semplificazione delle equazioni (5) che qui abbiamo ottenuta, mi è stata suggerita da un lavoro del prof. Tonelli in corso di pubblicazione nei « Rendiconti Lincei », nel quale tali equazioni sono ottenute senz'altro nella forma (5*). Noi abbiamo dimostrato ora che le (5) e le (5*) sono equivalenti a causa della identità (6), ma l'aver eliminato le espressioni che compaiono in queste identità dalla deduzione delle equazioni delle estremanti, è notevole perchè permette al prof. Tonelli, nel caso dei problemi in forma ordinaria, di abbandonare alcune restrizioni che io avevo dovuto ammettere nella mia Memoria citata.