Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Alberto Foa

Chiusura del sistema delle funzioni di Bessel

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 122–126.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_122_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Chiusura del sistema delle funzioni di Bessel.

Nota di ALBERTO FOÀ (a Firenze).

Sunto. - *L'A., applicando l'equazione di chiusura di* VITALI, *dimostra la chiusura del sistema delle funzioni di* BESSEL *nell'intervallo* (0, 1).

È noto il teorema di G. VITALI [1] sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali rispetto alle funzioni di quadrato sommabile.

(1) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte II, p. 25 (Zanichelli, Bologna, 1936).

Applicando questo teorema, è stata dimostrata da A. TONOLO la chiusura del sistema $\{1/\sqrt{2\pi}, \text{sen}\, nx/\sqrt{\pi}, \cos nx/\sqrt{\pi}\}$ [2], e da G. SANSONE la chiusura dei sistemi di polinomi di LEGENDRE, HERMITE, LAGUERRE [3].

Ci proponiamo ora, applicando il citato teorema di G. VITALI, di dimostrare la chiusura, rispetto alle funzioni di quadrato sommabile, del sistema delle funzioni di BESSEL ortogonali e normalizzate in (0, 1) $\left\{\frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} J_\nu(\lambda_n x)\right\}$ dove [4]

$$J_\nu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \qquad \nu > -1/2$$

e le λ_n sono radici positive dell'equazione

$$J_\nu(x) = 0, \qquad [n = 1, 2, \ldots].$$

Basterà per questo verificare che vale l'equazione di chiusura di VITALI

$$(1) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \left[\int_0^x \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt\right]^2.$$

Per $0 < \varepsilon < x$ è

$$(2) \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \left[\int_0^x \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt\right]^2 = S_1(x, \varepsilon) + 2S_2(x, \varepsilon) + S_3(x, \varepsilon)$$

con

$$(3)_1 \qquad S_1(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \left[\int_\varepsilon^x \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt\right]^2$$

$$(3)_2 \qquad S_2(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_0^\varepsilon \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt \int_\varepsilon^x \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt$$

$$(3)_3 \qquad S_3(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \left[\int_0^\varepsilon \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t)\, dt\right]^2.$$

(2) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, loc. cit. (1), p. 37.

(3) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, loc. cit. (1), p. 133 e pp. 208-211. Con altro procedimento la chiusura dei più noti sistemi ortogonali è stata provata da W. STEKLOFF. [Cfr. W. STEKLOFF, *Sur certaines égualités générales souvent employées dans l'analyse*. « Memoires de l'Acc. Imp. des Sc. de St. Petersbourg », serie VIII, vol. XV, n. 7 (Petersbourg, 1904)].

(4) Cfr. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, p. 40 (Cambridge, 1922).

Osserviamo che per a e b in $(0, \infty)$ si ha

$$\int_a^b \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt = \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_{\lambda_n a}^{\lambda_n b} \sqrt{u}\, J_\nu(u) du$$

ed essendo [5]

$$\left| \int_{\lambda_n a}^{\lambda_n b} \sqrt{u}\, J_\nu(u) du \right| < c_1, \qquad c_1 \text{ costante indipendente da } \lambda_n,\ a,\ b,$$

è

$$\left| \int_a^b \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \right| < \frac{c_1}{\lambda_n^{3/2}};$$

ma è [6]

$$n\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{\pi}{2} < \lambda_n < n\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{3}{2}\pi$$

e [7]

$$|J_\nu(\lambda_n)| \geq c_2 \lambda_n^{-1/2}, \qquad c_2 \text{ costante assoluta};$$

ne viene che le serie del secondo membro delle $(3)_1$, $(3)_2$, $(3)_3$ sono serie uniformemente convergenti di funzioni continue rispetto ad x, e ε quando x ed ε variano nel quadrato di lato 1, perciò

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_2(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} S_3(x, \varepsilon) = 0 \tag{4}$$

e basterà quindi studiare $S_1(x, \varepsilon)$.

È ora per $0 < h < \dfrac{x - \varepsilon}{2}$

$$S_1(x, \varepsilon) = S_1^{(1)}(x, \varepsilon, h) + S_1^{(2)}(x, \varepsilon, h) + S_1^{(3)}(x, \varepsilon, h) \tag{5}$$

con

$$S_1^{(1)}(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_\varepsilon^x \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du \tag{6$_1$}$$

$$S_1^{(2)}(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_\varepsilon^x \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du \tag{6$_2$}$$

$$S_1^{(3)}(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{x-h}^{x} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_\varepsilon^x \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du. \tag{6$_3$}$$

[5] Cfr. G. N. WATSON, loc. cit. [4], p. 595.
[6] Cfr. G. N. WATSON, loc. cit. [4], § 15.35, p. 492.
[7] Cfr. G. N. WATSON, loc. cit. [4], § 7.22, p. 199.

Per l'osservazione precedente le serie dei secondi membri delle $(6)_1$, $(6)_2$, $(6)_3$ sono serie uniformemente convergenti rispetto ad x, ε, h ed è

(7) $$\lim_{h \to 0} S_1^{(2)}(x, \varepsilon, h) = \lim_{h \to 0} S_1^{(3)}(x, \varepsilon, h) = 0,$$

basterà quindi studiare $S_1^{(1)}(x, \varepsilon, h)$.

È ancora

(8) $$S_1^{(1)}(x, \varepsilon, h) = A_1(x, \varepsilon, h) - A_2(x, \varepsilon, h) - A_3(x, \varepsilon, h)$$

con

$(9)_1$ $$A_1(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_0^1 \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du$$

$(9)_2$ $$A_2(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_0^{\varepsilon} \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du$$

$(9)_3$ $$A_3(x, \varepsilon, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_n t) dt \int_x^1 \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du,$$

e per l'osservazione precedente è

(10) $$\lim_{\varepsilon \to 0} A(x, \varepsilon, h) = 0.$$

Ma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_n t)}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_0^1 \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

uniformemente rispetto a t [8] per $\varepsilon + h \leq t \leq x - h$; e quindi [9]

(11) $$A_1(x, \varepsilon, h) = \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\lambda_n t)}{J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_0^1 \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_n u) du = x - 2h - \varepsilon.$$

Per $A_3(x, \varepsilon, h)$ è

$$A_3(x, \varepsilon, h) = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{J_\nu'^2(\lambda_m)} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, J_\nu(\lambda_m t) dt \int_x^1 \sqrt{u}\, J_\nu(\lambda_m u) du =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\varepsilon+h}^{x-h} \sqrt{t}\, dt \int_x^1 \sqrt{u}\, T_n(u, t) du$$

[8] Cfr. G. N. WATSON, loc. cit. [4], p. 591; 193. Si faccia $f(t) = t^{-1/2}$.

[9] Osserviamo che la dimostrazione di questo teorema [G. N. WATSON, loc. cit. [4], p. 593] è indipendente dal teorema di univocità per le serie di BESSEL [G. N. WATSON, loc. cit. [4], p. 616].

con

$$T_n(t, u) = \sum_{m=1}^{n} \frac{J_\nu(\lambda_m t) J_\nu(\lambda_m u)}{J_\nu{}'^2(\lambda_m)};$$

ora è [10]

$$\lim_{n \to \infty} \int_x^1 \sqrt{u}\, T_n(t, u) du = 0, \qquad \text{per } \varepsilon + h \leq t \leq x - h < x \leq u \leq 1$$

uniformemente rispetto a t e quindi

$$A_3(x, \varepsilon, h) = 0. \tag{12}$$

Si ha quindi per le (2), (4), (5), (7), (8), (10), (11), (12)

$$S(x) = x, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

([10]) Cfr. G. N. WATSON, loc. cit. ([4]), p. 589; si faccia $f(t) = t^{-1/2}$.