Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Sui numeri di Bernoulli e sui coefficienti delle tangenti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 126–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_126_0>

Sui numeri di Bernoulli e sui coefficienti delle tangenti.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si ricava una formula di* L. TOSCANO *e un'altra di* A. MAMBRIANI, *relative ai coefficienti delle tangenti e ai numeri di* BERNOULLI, *per mezzo di formule del* BELLAVITIS.

Vogliamo indicare in questa piccola Nota altre vie per ottenere alcune formule trovate di recente [1], relative ai numeri di BERNOULLI e ai coefficienti della tangente, in modo rapido e semplicissimo a mezzo di formule date da G. BELLAVITIS [2].

1. G. BELLAVITIS nel loc. cit., avendo indicato con $(m)_n$ la somma dei prodotti in tutti i modi possibili ad n ad n e senza ripetizione dei numeri $1, 2, \ldots, m-1$, e con $\frac{(m)_n}{0}$ il valore che per $(m)_n$ si trova a mezzo di formule indicate precedentemente dall'Autore, quando si sopprima il fattore che le annulla, nel caso di $m < n$, dà il se-

[1] Cfr. A. MAMBRIANI, *Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi di Bernoulli e di Eulero*, « Memorie R. Accademia d'Italia », t. III, 1932; L. TOSCANO, *Sui coefficienti della tangente e sui numeri di Bernoulli*, « Boll. dell'Unione Matematica Italiana », fasc. 1, 1936.

[2] Cfr. G. BELLAVITIS, *Sulle serie dei numeri che comprendono i Bernoulliani*, « Annali Tortolini », vol. V, 1853.

guente sviluppo della tangente:

(1) $$\operatorname{tg} x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} b_{2i},$$

essendo

(2) $$b_{2i+2} = (-1)^i \cdot 2^{2i+2} \cdot (2^{2i+2} - 1) \frac{(1)_{2i+2}}{0}.$$

Lo stesso BELLAVITIS ([1]) dà poi la seguente formula:

(3) $$B_n = n \cdot \frac{(1)_n}{0},$$

ove $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ ecc. sono i numeri di BERNOULLI.

Perciò la (1) a mezzo di (2) e (3) dà quest'altro sviluppo di $\operatorname{tg} x$:

(4) $$\operatorname{tg} x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot 2^{2i+2} \cdot (2^{2i+2} - 1)}{(2i+2)!} B_{2i+2} x^{2i+1}.$$

Ma è anche

(5) $$\operatorname{tg} x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{2i+1} \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

quindi dal confronto di (1) con (5), si deduce

(6) $$(-1)^i C_{2+1} = b_{2i+2}$$

e dal confronto di (4) con (5) si ricava la formula trovata dal TOSCANO ([2])

(7) $$C_{2i+1} = \frac{2^{2i+2} \cdot (2^{2i+2} - 1)}{2i+2} B_{2i+2}$$

che stabilisce la relazione fra i B_n e i C_n.

2. A mezzo della (6) e della (7), dalle formule (51), (52), (54), che nel lavoro citato del BELLAVITIS danno esplicitamente i valori di b_{2n}, se ne possono ricavare altrettante che danno dei valori espliciti di C_n e di B_n. E così pure dalle relazioni (31), (36), (37) del loc. cit. di G. BELLAVITIS fra i numeri b_{2i}, si possono ottenere, con le indicate sostituzioni, delle altre fra i C_n ed i B_n. Inoltre la formula (55)

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2i}} = \frac{\pi^{2i}}{2^{2i} - 1} \cdot \frac{b_{2i}}{2(2i-1)!}$$

([1]) Loc. cit., pag. 112.

([2]) Cfr. L. TOSCANO, loc. cit., pag. 11, formula (14).

utilizzando la (6) e la (7) permette di esprimere $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2i}}$ in funzione di C_n e di B_n.

3. La seguente formula (33), della Memoria di G. BELLAVITIS, ci fa ricavare facilmente un'altra formula ricavata dal MAMBRIANI nel loc. cit.:

$$\frac{r+1}{r-1} \cdot \frac{(1)_r}{0} = -\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}} \binom{r-2}{2i-1} \cdot \frac{(1)_{r-2i}}{0} \cdot \frac{(1)_{2i}}{0}, \quad \text{per } r \text{ pari.}$$

Ponendo $r = 2m$ la precedente può scriversi

$$\frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{(1)_{2m}}{0} + \frac{2m}{2m(2m-1)} \cdot \frac{(1)_{2m}}{0} = -\sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-2}{2i-1} \cdot \frac{(1)_{2m-2i}}{0} \cdot \frac{(1)_{2i}}{0},$$

ossia

$$\frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{(1)_{2m}}{0} + \frac{2m}{2m(2m-1)} \cdot \frac{(1)_{2m}}{0} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-2}{2i-2} (2m-2i) \cdot \frac{(1)_{2m-2i}}{0} \cdot \frac{2i}{2i(2i-1)} \cdot \frac{(1)_{2i}}{0},$$

e per la (3)

$$\frac{1}{2m-1} B_{2m} + \frac{1}{2m(2m-1)} B_{2m} = -\sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m-2}{2i-2} \frac{B_{2m-2i} B_{2i}}{2i \cdot (2i-1)},$$

cioè

$$\frac{1}{2m-1} B_{2m} + \frac{1}{2m(2m-1)} B_{2m} = -\frac{1}{2m(2m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m}{2i} B_{2m-2i} B_{2i}$$

a quindi infine

$$-(2m+1) B_{2m} = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{2m}{2i} B_{2m-2i} B_{2i},$$

che coincide con la formula che precede la (15) (del lavoro citato di MAMBRIANI), del cap. II, n. 10.
