Recensioni

* R. Carnap: La science et la métaphysique devant l'analyse logique du langage (B. Levi)
* G. Ascoli - P. Burgatti - G. Giraud: Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico (B. Levi)
* P. Alexandroff - H. Hope: Topologie (Beniamino Segre)
* W. Blaschke: Integralgeometrie, I: Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n (Beniamino Segre)
* J. Jarosch: Zur Unterrichtslehre der darstellenden Geometrie (Beniamino Segre)
* P. Humbert: Potentiels et Prépotentiels
* J. Sen: La réduction des séries alternées divergentes et ses applications

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.3, p. 131–141.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_3_131_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

RECENSIONI

R. CARNAP: *La science et la métaphysique devant l'analyse logique du langage.* — ID: *Le problème de la logique de la science: science formelle et science du réel.* — M. SCHLICK: *Sur le fondement de la connaissance.* — O. NEURATH: *Le développement du cercle de Vienne et l'avenir de l'empirisme logique.* — E. VOUILLEMIN: *La logique de la science et l'école de Vienne.* J. PACOTTE: *La logique et l'empirisme intégral.* — P. RENAUD: *Structure de la pensée et définitions expérimentales.* — R. DUGAS: *La méthode dans la mécanique des quanta.* — J. DELEVSKY: *La prévision historique dans la nature.* Nove fascicoli della Collezione « Actualités scientifiques et industrielles », Hermann et C., édit.. 1934-35.

La divisa della « scuola di Vienna » è l'*antimetafisica*: essa si imparenta per questo al positivismo o al materialismo: ma vuole distinguersene per il criterio discriminativo del « metafisico » che si vorrebbe ricercare nella consistenza logica del discorso. L'illusione di poter eliminare i dissensi gli errori i sofismi provenienti dal valore mal definito delle parole vincolando il discorso negli schemi logici aveva già brillato alla mente del LEIBNIZ, non antimetafisico: ma l'abbiamo detta illusione perchè è ben noto che il pensiero non accetta quel vincolo e che la formazione dei concetti è una elaborazione interna della mente impossibile a cristallizzarsi in un dato istante in definizioni e in dati d'esperienza: l'ideografia logica realizzata da G. PEANO per limitati campi del ragionamento matematico (costruzione per sè stante, non mezzo di ragionamento nemmeno nell'ambito della sua applicazione) non potè raggiungere, nel senso antimetafisico qui considerato, nemmeno tutta la logica, poichè è ben noto che taluni termini di logica pura come « oggetto », « aggregato », « proposizione » ecc. devono essere accolti nel loro significato intuitivo. La filosofia scientifica può evitare gli scogli della metafisica, non ha mezzi per distruggerli.

Ma è permesso l'uso che fa il CARNAP delle parole « logica » e « sintassi » ? Ed è programma filosofico o scientifico quello che egli ci espone nei due opuscoli? la proposizione « Cesare è un numero primo » (egli semplifica) rispetta completamente le regole della sintassi grammaticale: non quelle della *sintassi logica* perchè mette Cesare in relazione con un predicato che non è attribuibile ad un uomo; ci pare che l'affermazione di tale non-attribuibilità non appartenga alla forma della proposizione, ma comporti un giudizio: è vero che il C. propone un lavoro di classificazione delle parole in tipi secondo la loro sostituibilità nella formazione di giudizi possibili: tanto varrebbe, ci pare, di fare il catalogo delle frasi vere false ed insensate... e poi? le frasi del catalogo sarebbero morte e le frasi vive sarebbero altre, vivificate dall'occasione della loro formazione. Forse il programma della classificazione non è che una maniera per enunciarne il principio: « ogni parola della lingua è ricondotta ad altre e così finalmente a quelle che formano gli « enunciati d'osservazione » o « enunciati protocollari » ; ma M. SCHLICK insiste lungamente per concludere che non esistono, nel senso strettamente empirista, enunciati protocollari, perchè quando la constatazione empirica raggiunge la forma di enunciato (e non è che un sistema di enunciati ciò che noi chiamiamo *conoscenza*) ha già subito il lavorìo di soggettivazione e di intersoggettivazione ed è divenuta un simbolo che può soltanto essere utilizzato attraverso ad una nuova interpretazione: il vero empirismo non può essere che personale e si realizza soltanto nei fuggitivi istanti delle percezioni (stati-di-coscienza) che punteggiano il corso della nostra vita spirituale. Osservazione verissima, ma pur tale che, intesa come criterio assoluto della realtà scientifica, ci pare un poco demolitrice della scienza; perchè, nemmeno in senso subbiettivo, non è scienza fuori del sistema, dell'espressione, dell'interpretazione. L'opuscolo del NEURATH contrappone nella sua origine e nel suo svolgimento la scuola di Vienna alle filosofie che l'hanno preceduta rilevandone con particolare vivacità l'opposizione generica al pensiero filosofico tedesco; il generale VOUILLEMIN, del quale sono le versioni francesi, riassume poi, nell'opuscolo di cui è autore, le vedute tutt'altro che uniformi dei diversi esponenti della scuola: e il V., che ama iscriversi fra i caldi fautori, non esita ad esprimersi contro talune esagerazioni del miraggio antimetafisico: appoggiandosi al FRANCK, egli arriva ad ammettere che, anzichè respingere come insensate o metafisiche talune questioni, possa e debba ricercarsene la risposta nella teologia...; osiamo dubitare che a questo punto si passi il confine che limita il dominio della filosofia scientifica. Il PACOTTE distingue nella logica il compito formale (deduttivo) e quello interpretativo del reale (induttivo): il far testo unicamente, per la logica formale, delle idee e del simbolismo del BOOLE è forse un po' troppo ignorare (sia pure volutamente) molti ed importanti sviluppi che hanno seguito; e le considerazioni sul reale potrebbero forse essere giudicate, dal punto di vista della scuola di Vienna, di tinta leggermente metafisica; molte tuttavia illuminano adeguatamente punti delicati del problema gnoseologico.

I saggi del RENAUD e del DELEVSKY sono riflessioni di due cultori l'uno della chimica, l'altro della fisica terrestre sul determinismo scientifico: determinismo inteso come capacità pratica di previsione (che si riconosce effettivamente molto limitata) per il secondo, mentre pel primo si tratta del significato medesimo, pur sotto un angolo visuale molto particolare, quello della possibilità e dei limiti della identificazione concreta che nella nozione del determinismo è inclusa: si arriva così a considerazioni che, mantenendosi molto lontane dalle teorie quantistiche, ricordano il principio di indeterminazione dell'HEISENBERG. A tentare un collegamento filosofico fra le teorie quantistiche e la meccanica classica è rivolto l'opuscolo del DUGAS.

La collezione Hermann si presenta come campo aperto alla discussione filosofico-scientifica ecletticamente secondo i più varî indirizzi del pensiero moderno e suscita perciò vivo interesse anche per ciò che essa stimola di consenso e di dissenso. B. LEVI

G. ASCOLI - P. BURGATTI - G. GIRAUD: *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico* delle « Pubblicazioni della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Firenze, Sansoni, 1936-XIV; pp. 186+IV, L. 40.

Il volume comprende tre monografie, la prima (p. 50) del BURGATTI sulle *Equazioni alle derivate parziali del tipo ellittico*, le altre due, rispettivamente dell'ASCOLI (p. 88) e del GIRAUD (p. 41) sulle *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*: monografie premiate nel Giugno 1934 a un concorso indetto dagli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa »: nonostante l'identità del tema, il diverso temperamento degli AA. ha fatto che pochissime siano le interferenze e che piuttosto i tre lavori valgano a formare una unità rispecchiante in modo completo lo stato attuale di questa teoria. Il BURGATTI, più aderente ad indirizzi classici e alla mentalità del fisico, circoscrive subito il problema alle equazioni ellittiche del 2° ordine in un numero qualsiasi di variabili, imperniando la teoria intorno alla formola di GREEN e quindi, per quanto riguarda l'effettiva risoluzione dell'equazione con date condizioni al contorno, alla *postulazione* della funzione di GREEN. I problemi di esistenza passano così in secondo ordine ed in compenso si studiano ampiamente le proprietà dell'equazione e delle sue soluzioni, dando particolare rilievo alle funzioni armoniche e metaarmoniche. Il lavoro dell'ASCOLI è il più ricco d'informazione generale e moderna, ma, appunto perciò, la ristrettezza dello spazio ne sposta un poco il carattere dalla monografia verso l'articolo di enciclopedia: vi si tratta in due parti distinte dei due tipi ellittico e parabolico partendo dalla più generale impostazione del problema, in cui la classificazione dipende tanto dall'equazione quanto dalla particolare soluzione considerata e con grande limpidità si riferisce sulla dimostrazione dell'analiticità della soluzione appoggiata dapprima (1904) da S. BERNSTEIN ad un processo di approssimazione ed invece recentemente (1929) da H. LEVY ad una forma di continuazione analitica: dopo convenienti accenni a questioni ausiliarie, più elementari e classiche, si passa in esame la grande varietà dei metodi con cui si è cercato di affrontare il problema dei valori al contorno. Colla stessa cura si esaminano quindi i corrispondenti problemi relativi alle equazioni paraboliche, per le quali, com'è noto, assai più scarsa è la messe di ricerche e di risultati: l'estesa bibliografia con cui il lavoro si chiude ne fa un ausilio essenziale per chi voglia approfondire modernamente l'argomento. La monografia del GIRAUD, con cui il volumetto si chiude, si distingue pel suo carattere organico e personale, presentandosi come la sintesi, e il coordinamento con altre ricerche recenti, degli studi che l'A. da alcuni anni è andato svolgendo in una serie di Memorie nelle quali il caso ellittico è studiato sotto un aspetto di grande generalità mediante il geniale sfruttamento e approfondimento di un'idea di EUGENIO ELIA LEVI (*Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Palermo, 1907), consistente nel costruire *a priori* funzioni approssimanti soluzioni elementari (che il G. chiama appunto *funzioni di Levi*) e nel ricondurre con questo mezzo la determinazione delle soluzioni alle equazioni integrali. B. LEVI

P. ALEXANDROFF - H. HOPF: *Topologie*. T. I (Berlin, Springer, 1935); pp. XIV+636, Rm. 45 (rileg. Rm. 46,80).

È questo il primo di tre volumi che gli AA., secondo un programma di largo respiro, contano di dedicare alla Topologia; da esso già è possibile giudicare che si tratta di un'opera di primissimo ordine ed immancabile successo. L'ALEXANDROFF ed il HOPF sono ben noti per i loro importanti contributi a la Topologia, concernenti rispettivamente i due fondamentali indirizzi della *Topologia degli insiemi* e della *Topologia algebrico-combinatoria*: qui è manifesto ed esplicito il proposito di accostare ed amalgamare tali indirizzi, contribuendo così nel modo più efficace al processo di unificazione della Topologia — da poco iniziato — il cui interesse per i futuri sviluppi di questa disciplina non può sfuggire ad alcuno.

Nel presente volume, dedicato a L. E. J. BROUWER e principalmente rivolto ai poliedri n-dimensionali generali, gli AA. dominano l'ampia materia con vera maestria, conferendo ad essa la più vasta portata che consegue dall'uso sistematico di nozioni e di risultati tratti dalla teoria degli spazi astratti, nonchè da una forte tendenza algebrizzante, ispirata alle moderne concezioni algebrico-gruppali della rimpianta E. NOETHER.

L'opera non pretende di fornire un quadro completo dello stato attuale della Topologia, chè anzi non pochi sono gli argomenti, anche relativamente importanti, lasciati in disparte. Ma le questioni prese in esame sono impostate e sviscerate con originalità, profondità e larghezza, dando particolare rilievo all'essenza dei diversi procedimenti dimostrativi, talora fra loro opportunamente contrapposti; inoltre gli intenti unificatori di cui si è detto in principio sono in questo primo volume già raggiunti in misura sensibile, e più ancora potranno esserlo coi due volumi che faranno seguito a quello, i quali rispettivamente verteranno sulla teoria topologica degli insiemi e sulla teoria delle varietà topologiche. Il notevole perfezionamento a cui varî fondamentali capitoli di Topologia trovansi così sottoposti, non mancherà di suscitare nuove ricerche ed ulteriori progressi.

L'esposizione è in certi punti appesantita dalla grande astrattezza, dalla terminologia non del tutto semplice, e da qualche dimostrazione eccessivamente frammentaria, con frequenti rinvii a sviluppi precedenti (costantemente effettuati, invece che mediante l'indicazione della pagina, con quella meno comoda di capitolo, paragrafo e numero). Essa ha però sempre un'alta impronta personale, e doti preziose di generalità, chiarezza, rigore.

Il volume in esame consta di quattro Parti, precedute da una interessante Introduzione [1] e seguite da due pregevoli Appen-

[1] Nei sobri cenni storici che in essa compaiono avrebbero forse dovuto ricevere maggior risalto i legami intercedenti fra Topologia e Geometria algebrica, e non venir omesse le citazioni dei recenti lavori sulle varietà algebriche di HODGE e SEVERI.

dici. Queste ultime forniscono, sotto forma lucida e stringata, le nozioni accessorie — concernenti ordinatamente la teoria dei *gruppi abeliani* (moduli, ranghi, caratteri, ecc.) e gli *spazi euclidei* a più dimensioni (spazi lineari subordinati, insiemi e celle convesse, baricentri) — di cui vien fatto uso nel testo, e raggiungono lo scopo di ridurre a poco o nulla l'ulteriore bagaglio matematico strettamente indispensabile al lettore (1).

La prima Parte (Cap. I-II), contenente gli *elementi della teoria topologica degli insiemi*, sta a fondamento del futuro t. II, ed ha in questo t. I l'ufficio di inquadrare — da un punto di vista superiore — molte delle successive definizioni e proposizioni concernenti i poliedri.

Il Cap. I introduce gli *spazi topologici-generali*, mediante la definizione assiomatica dell'*inviluppo chiuso* di un qualunque loro sottoinsieme, con particolare riguardo ai casi in cui il coordinamento fra un insieme ed il suo inviluppo chiuso avviene o può avvenire attraverso la nozione di *convergenza*, di *distanza* o di *intorno*; qualora detto coordinamento soddisfi ai quattro *assiomi di* KURATOWSKI, lo spazio è semplicemente denominato *topologico*. Sono poi approfonditi i varî *assiomi di separazione* (inerenti agli intorni di due punti distinti), nonchè le proprietà più importanti che si riattaccano ai concetti di punto di accumulazione, ricoprimento, connessione, rappresentazione continua, base di uno spazio topologico, ecc., fino ad ottenere la caratterizzazione topologica (di URYSOHN) degli *insiemi appartenenti allo spazio hilbertiano*.

Il Cap. II tratta degli spazi topologici e metrici *compatti* e *bicompatti* (in grande ed in piccolo), di alcuni loro *teoremi di ricoprimento* — detti di HEINE-BOREL-LEBESGUE (2) — e delle *rappresentazioni continue* fra di essi. Nel caso degli spazi metrici sono inoltre particolarmente studiati gli spazi *totalmente limitati* e gli spazi *completi,* come pure la *convergenza* (topologica e metrica) *di una successione di insiemi,* e le proprietà relative alla *concatenazione* ed alla *connessione dei compatti.*

La seconda Parte (Cap. III-VII) comprende un'ampia tratta-

(1) Il libro non riesce però di facile lettura per il principiante, mentre esso può qua e là sembrar prolisso a chi conosca già i fondamenti della Topologia.

(2) A proposito di questi si sarebbe anche dovuto fare il nome del PINCHERLE, il quale ha dato — sotto forma diversa da quella divenuta poi usuale — il primo teorema di ricoprimento: cfr. S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche,* « Mem. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », serie IV, t. 3 (1881-82), p. 151, nota (3) alla fine del n. 5.

zione della *Topologia combinatoria,* in cui gli sviluppi concernenti la teoria dell'omologia sono però limitati a quelli validi per complessi arbitrari.

Nel Cap. III vengon dapprima definiti i *complessi euclidei* (costituiti da celle euclidee convesse o, in particolare, da simplessi), e di essi sono studiate le più semplici e fondamentali proprietà inerenti alla *struttura* ed alle *suddivisioni* di differenti tipi. È quindi effettuato il passaggio al punto di vista astratto, attraverso alla considerazione di *complessi* e di *poliedri curvi,* come pure della *nervatura* di un sistema di insiemi.

Tutto ciò riceve la massima estensione nel successivo Cap. IV, ove sono introdotti i *complessi* di un qualunque *campo di vertici.* Si passa poi all'*orientazione* di simplessi e complessi, ed alle prime proprietà dei *complessi interi* (o catene) e dei loro *contorni,* le quali tosto sono trasportate al caso più generale dei *complessi algebrici* (finiti od infiniti, e relativi a campi di vertici e di coefficienti affatto arbitrari). Seguono alcune nozioni sulle *rappresentazioni simpliziali* fra campi di vertici, fra complessi e fra poliedri, nonchè sui *cicli* e sulle *omologie* (generalizzate) di un complesso algebrico; relativamente a queste ultime è da segnalare l'introduzione di un doppio campo di numeri, che permette di considerarle come estensioni delle omologie ordinarie, di quelle con divisione e di quelle mod *m.* Vi è infine l'analisi delle varie specie di *connessione* di un complesso, a cui si riattaccano definizioni e teoremi sulle *componenti,* sull'*orientabilità* e sulle *pseudovarietà.*

Il Cap. V è dedicato allo studio approfondito dei *gruppi di* Betti (di un dato campo di vertici o, in particolare, di un dato complesso), corrispondenti alle diverse dimensioni ed a due campi di numeri, con particolare riguardo ai varî casi importanti che si possono avere nella scelta di questi ultimi (anello dei numeri interi o dei numeri interi ridotti rispetto ad un modulo assegnato, corpo dei numeri razionali, oppure gruppo additivo dei numeri razionali ridotti rispetto al modulo 1). Qui giocano nel modo più largo ed efficace le concezioni ed i procedimenti di carattere gruppale, tanto che p. es. — nel caso dei complessi finiti — la classica teoria di Poincaré è svolta evitando del tutto le matrici d'incidenza.

Il Cap. VI tratta delle *suddivisioni* di un complesso, e stabilisce l'*invarianza dei gruppi di* Betti di fronte a tali operazioni; vanno poi rilevate alcune estensioni della nozione di *cella,* e numerosi esempi e problemi riferentisi agli sviluppi precedenti. Da ultimo (nel Cap. VII) sono esposti risultati importanti, seppure di natura relativamente particolare, concernenti i *complessi chiusi,* e la *somma* od il *prodotto* di due complessi (formule di MAYER-VIETORIS, di KÜNNETH, ecc.).

Nella terza Parte (Cap. VIII-X) la *teoria dell'omologia* è trasportata dai complessi ai *poliedri*, stabilendone in pari tempo l'invarianza topologica. Ciò è ottenuto anzitutto (Cap. VIII) col mètodo dell'*approssimazione simpliziale* di BROUWER, sotto la forma semplificata datagli dall'ALEXANDER, e col conseguente studio dei *tipi di omotopia* e dei *tipi di omologia* di una classe di rappresentazioni; per tale via è provata l'*invarianza topologica* della dimensione, dei gruppi di BETTI (donde si ha una nuova dimostrazione dell'invarianza di questi gruppi di fronte alle suddivisioni), dei cicli n-dimensionali di un poliedro di dimensione n, ecc..

Nel Cap. IX trovasi una *caratterizzazione invariantiva* — di grande portata — della dimensione e dei gruppi di BETTI, basata sulla considerazione dei così detti *scorrimenti canonici* (definiti e studiati addirittura per i *compatti*, ossia per gli spazi metrici compatti), la quale conduce ancora all'invarianza topologica di quelli. Il Cap. X contiene la *caratterizzazione invariantiva* delle regioni di uno spazio euclideo (teor. di BROUWER), e del numero delle regioni in cui uno spazio euclideo è diviso da un compatto qualsiasi (teor. di JORDAN generalizzato); come applicazione, è in esso pure stabilita l'*invarianza topologica* di varie specie di connessione, delle pseudovarietà, dell'orientabilità o non orientabilità di un complesso, ecc..

La quarta Parte (Cap. XI-XIV) verte infine sulla *teoria dell'allacciamento* e sulle *rappresentazioni continue* fra poliedri, ed è la più densa di contenuto geometrico.

Il Cap. XI tratta del *numero* (algebrico) *di intersezione* di due complessi algebrici di dimensioni p e q appartenenti ad un S_{p+q} euclideo, nonchè del *numero di allacciamento* di due cicli di dimensioni p e q situati in un S_{p+q+1}. Esso culmina col fondamentale *teorema di dualità* di ALEXANDER; questo comprende come caso particolare il suddetto teorema di JORDAN-BROUWER, del quale è anche data — in apposita appendice — un'ulteriore notevole dimostrazione di LEBESGUE-ALEXANDER.

Il Cap. XII si occupa dell'*ordine di un punto* rispetto ad un ciclo n-dimensionale di S_n, del *grado brouweriano* (in grande) inerente alla rappresentazione di un ciclo in un poliedro chiuso, della *caratteristica* (o *indice*) di KRONECKER di un sistema di funzioni, infine del *grado in un punto* relativo alla rappresentazione di un poliedro euclideo n-dimensionale in un S_n od in un altro poliedro euclideo n-dimensionale. A ciò vengono riattaccate importanti proposizioni (di BROUWER, POINCARÉ ed altri) sui *campi* *di vettori* aventi per sostegno un' ipersfera piena od un' ipersuperficie sferica di dimensione pari, sull' *esistenza di punti fissi* nella rappresentazione di un elemento in sè, ecc..

Gli sviluppi suddetti inquadrano la teoria del grado di BROUWER e dell' indice di KRONECKER in quella dell' allacciamento; viceversa quest' ultima può (col BROUWER) derivarsi dalla prima, come qui è provato in un' appendice del Cap. XII. Il Capitolo successivo espone poi vari teoremi — in gran parte dovuti a H. HOPF — sull' *omotopia* e sulla *prolungabilità* di rappresentazioni continue (di un poliedro in un' ipersfera o di un poliedro in sè), in istretta connessione colla teoria precedente e con quella dell' omologia.

L' ultimo Capitolo (il XIV) stabilisce alcune proposizioni generali affermanti la sufficienza di certe condizioni per l' esistenza di *punti fissi* di una rappresentazione di un poliedro finito in sè, definisce la *molteplicità algebrica* (od indice) di uno di quei punti fissi, della quale dimostra l' invarianza topologica, ed introduce il *numero algebrico* globale di detti punti fissi, numero che determina nel caso di poliedri euclidei omogenei. Come applicazione, sono infine studiate le singolarità di *campi di elementi lineari orientati* sopra una varietà chiusa differenziabile.

Il volume si chiude con qualche indicazione bibliografica, e con un indice per materie assai particolareggiato.

BENIAMINO SEGRE

W. BLASCHKE: *Integralgeometrie,* I: *Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im* E_n. « Actualités scientifiques et industrielles », 252 (Paris, Hermann, 1935); pp. 24, frs. 7.

La Geometria integrale non è altro che lo studio degli invarianti integrali delle figure; la sua origine prima risiede in alcune trattazioni, storicamente importanti, riguardanti le probabilità nel continuo (o probabilità geometriche). Le recentissime ricerche sistematiche dell' illustre Geometra di Amburgo e della sua Scuola prescindono però dalle applicazioni, e mirano a creare un nuovo ramo autonomo di Geometria, non privo di una sua particolare attrazione.

Il lavoro in esame apre in modo brillante la serie delle pubblicazioni nel suddetto indirizzo. Il suo risultato fondamentale è l' esistenza di un invariante integrale per *le* r*-sfere massime* di una data n-sfera ($r < n$), oppure per *gli* S_r o per *i movimenti* di un S_n euclideo assegnato; tali invarianti integrali risultano univocamente determinati, a meno di un fattore costante, ed i relativi elementi differenziali vengon chiamati *densità*. L' espressione di queste densità è fornita sotto forma di prodotto alternato di forme pfaffiane, ciò che ne rende semplice il calcolo (quando si usino rappresentazioni parametriche arbitrarie), agevolando pure la dimostrazione della loro invarianza. L'ultimo paragrafo riferisce poi intorno ad altri notevoli risultati, conseguiti dall'A. e da alcuni suoi discepoli nell'ordine d'idee in discorso.

L'eleganza degli sviluppi e la limpidità dell'esposizione, rendono veramente piacevole la lettura di questo interessante fascicoletto. BENIAMINO SEGRE

J. JAROSCH : *Zur Unterrichtslehre der darstellenden Geometrie.* Leipzig u. Wien, Deuticke, 1936 ; pp. 47, Rm. 2.

Quest'opuscolo raccoglie quattro conferenze tenute dall'A. sui seguenti argomenti :

Carattere formativo dell'insegnamento della Geometria descrittiva, con notizie storiche concernenti particolarmente l'Austria. Sviluppo dell'intuizione spaziale (classificata in intuizione prospettica e tecnica), mediante l'opportuna scelta di costruzioni geometriche e l'uso di modelli ed apparecchi. Introduzione nelle scuole medie dei concetti inerenti alle proiezioni ortogonali ed oblique. Modo elementare di presentare le sezioni coniche nell'insegnamento della Geometria descrittiva.

Le considerazioni qui svolte offrono qualche interesse didattico, per quanto non abbiano doti spiccate di originalità e rispondano ad una concezione eccessiva, ormai superata, dell'importanza della Geometria descrittiva. BENIAMINO SEGRE

P. HUMBERT : *Potentiels et Prépotentiels.* (« Cahiers scientifiques », fasc. XV, fr. 24).

Lo studio dei potenziali newtoniani condusse all'equazione di LAPLACE, e questa alla sua volta aprì la via alla ricerca di soluzioni e di funzioni della più alta importanza nell'analisi e nelle sue applicazioni. Nelle 78 pagine di questo « Cahiers scientifiques » il prof. HUMBERT offre appunto al lettore una rapida esposizione della genesi e delle proprietà delle funzioni di LAPLACE, di BESSEL, di MATHIEU, dei polinomi di LEGENDRE, di HERMITE, di GEGENBAUER ed altri, che trovano applicazioni in tutti i rami della fisica-matematica anche nei più moderni, come nella meccanica ondulatoria. E non si limita alla sola parte classica, ma prendendo in considerazione lo spazio ad n dimensioni, dà un quadro riassuntivo delle estensioni più importanti.

La generalizzazione della legge di NEWTON offre poi, con l'introduzione dei prepotenziali, già fatta da GREEN più di mezzo secolo fa, un'altra via per estendere le ricerche classiche. A questo riguardo l'A. riassume parecchi risultati facendo opportuni raffronti con quelli ottenuti precedentemente.

I prepotenziali soddisfano ad un'equazione del 2° ordine uguale a quella di LAPLACE con l'aggiunta di un termine del 1° ordine. Si può domandare se non si possa opportunamente generalizzare l'equazione di LAPLACE passando alle derivate d'ordine superiore al secondo. A questo proposito l'HUMBERT stesso ha considerato l'equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0,$$

ed ha mostrato che presenta parecchie analogie con l'equazione di LAPLACE e permette interessanti generalizzazioni, che sono state messe in evidenza anche da altri Autori.

In sostanza è un riassunto ben fatto di un importante soggetto, e perciò riuscirà utile a una larga cerchia di lettori. *p. b.*

J. SER: *La réduction des séries alternées divergentes et ses applications.* Pagg. VI-43. Paris, Gauthier-Villars, 1935.

Questo opuscolo, che fa seguito all'altro del medesimo Autore, dal titolo: *Les calculs formels des séries de factorielles*, presenta gli stessi caratteri del precedente. Anche quì, le considerazioni di indole teorica ed in particolare quelle relative a condizioni di convergenza sono intenzionalmente lasciate da parte: ma mentre va apprezzata la singolare virtuosità dell'A. nella deduzione e nell'aggruppamento delle formule, il fatto che il lavoro, che per dichiarazione dell'A. stesso « n'a rien de didactique », manca di quella organicità che ne renderebbe la lettura più attraente.

Nella prima delle due parti in cui è diviso l'opuscolo, premesse alcune deduzioni dalla terie di interpolazione di NEWTON, sono studiate da un punto di vista formale le serie alternate il cui tipo più semplice è dato dalla

$$f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \dots$$

e ne sono fatte applicazioni al logaritmo integrale, ai polinomi di LAGUERRE, al metodo di sommazione esponenziale di BOREL; nella seconda parte sono dati i sussidi, anche attraverso tabelle laboriosamente costruite, per il calcolo numerico approssimato dei coefficienti delle richieste serie di fattoriali o di facoltà. Brevi note destinate a completare alcuni punti del testo chiudono l'opuscolo. (*u*)