SALVATORE PINCHERLE

Sulla permutabilità negli operatori lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 153–161.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_153_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

PICCOLE NOTE

Sulla permutabilità negli operatori lineari

di SALVATORE PINCHERLE †

Circa un mese avanti la Sua morte il compianto prof. PINCHERLE *aveva promesso al Seminario Matematico dell'Università di Bologna una conferenza in cui avrebbe esposto le idee sulla permutabilità degli operatori lineari sulle quali negli ultimi anni il Suo pensiero era più volte ritornato. Non si può dubitare che lo spunto iniziale di tali pensieri sia stato il ravvicinamento della teoria delle operazioni distributive, a cui l'opera Sua ha portato dal punto di vista della pura analisi contributi vitali, al recente spontaneo presentarsi di tali operazioni come strumento essenziale della fisica moderna, della quale Egli, fino agli ultimi giorni, si interessò con giovanile passione. Gli operatori permutabili di secondo ordine associati fra loro di cui si parla nelle pagine che seguono si sono infatti presentati allo* SCHRÖDINGER *nella coppia* x *e* $\frac{\partial}{\partial x}$ *soddisfacenti all'equazione* $\frac{\partial}{\partial x} x \cdot - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} = 1$.

Quella conferenza, rimandata dapprima di qualche giorno, per lieve Sua indisposizione, non potè più tenersi a causa della chiusura dei corsi; ma fra le carte manoscritte del compianto Maestro se ne trovò un appunto redatto colla cura minuziosa che Gli era propria ed un sommario (destinato evidentemente ad essere traccia all'esposizione orale) che al detto appunto portava qualche modificazione, particolarmente di ordine.

Sebbene buona parte degli argomenti della conferenza abbiano già fatto oggetto di Note dei Lincei, dell'Accademia di Bologna, della Società per il Progresso delle Scienze fra il 1931 e il 1933, riteniamo doveroso omaggio alla Sua memoria e offerta gradita ai lettori del «Bollettino» il pubblicarne questa veduta d'insieme, redatta da B. LEVI *con cura affettuosa, cercando di mantenersi a quegli appunti fedele quanto possibile.*

LA REDAZIONE

Sunto. - *Si definisce lo scarto dalla permutabilità delle operazioni [illegible] e gli scarti di ordine superiore; se ne mostrano notevoli proprietà algo-*

ritmiche analoghe a quelle della derivazione: si assegna la forma generale degli operatori permutabili dei diversi ordini rispetto a uno dato fondamentale; si considera quindi la permutabilità rispetto alle potenze dell'operatore fondamentale e si definisce e studia la semipermutabilità. Si applicano le considerazioni generali al caso dell'operatore fondamentale $Q(\varepsilon_{n+1}) = h_{n+1}\varepsilon_n$.

I. **Lo spazio su cui si opera.** — Abbiasi una successione di infiniti elementi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ pei quali sia definita la moltiplicazione per numeri (indicati in ciò che segue con lettere latine); sia anche definita la somma di un numero finito o infinito di tali prodotti e conseguentemente tutti gli elementi della forma $c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \ldots$. Si ammette l'esistenza di un elemento $0 = 0\varepsilon_0 + 0\varepsilon_1 + \ldots$ colle solite proprietà e si esclude che due elementi possano essere uguali se non hanno i coefficienti omologhi uguali. Si indicheranno questi elementi colle lettere greche maiuscole: il loro insieme costituisce un modulo che noi chiameremo « lo spazio S »: la successione $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ si chiamerà la sua *base*.

II. **Operatori lineari.** — Siano definiti operatori lineari che trasformano univocamente elementi di S in elementi di S: quindi S in S o in una sua parte e pei quali valgano le ordinarie proprietà distributiva e associativa: si indicheranno questi operatori colle lettere latine maiuscole e sarà quindi

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta) \qquad A(c\alpha) = cA(\alpha) \qquad B(A(\alpha)) = (BA)(\alpha)$$
$$A(B + C) = AB + AC \qquad A(BC) = (AB)C = ABC.$$

Gli operatori costituiscono quindi un anello.

Un operatore è definito dal suo modo di operare sopra gli elementi della base: posto $A(\varepsilon_i) = a_{i0}\varepsilon_0 + a_{i1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{in}\varepsilon_n + \ldots$ chiameremo *matrice di A* la matrice, generalmente infinita,

$$[A] = \| a_{i0} \; a_{i1} \; \ldots \; a_{in} \ldots \|:$$

essa definisce l'operatore A e i suoi elementi possono scegliersi arbitrariamente; alle operazioni di somma e prodotto sugli operatori corrispondono le operazioni analoghe sulle corrispondenti matrici secondo le regole ordinarie.

Considereremo in seguito due speciali operatori di particolare importanza: le *dilatazioni* definite dalle matrici

$$[L] = \begin{Vmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & h_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \qquad (A(\varepsilon_n) = h_n\varepsilon_n)$$

e l'operatore M

$$[M] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \qquad (M(\varepsilon_1) = \varepsilon_{n+1}).$$

III. **Permutabilità e scarto.** — Si dice che due operatori A e B sono permutabili quando $AB = BA$. Fissato un operatore A che chiameremo *fondamentale*, gli operatori permutabili con A formano un gruppo: infatti da

$$PA = AP, \qquad QA = AQ$$

segue

$$PQA = PAQ = APQ; \qquad QPA = QAP = AQP;$$

è però da osservare che essi non sono generalmente permutabili fra loro. Il gruppo contiene l'operazione identica, le potenze positive e negative di A e di ogni elemento del gruppo medesimo.

Indicheremo gli operatori permutabili con A colla lettera P affetta da indici.

Se B è un operatore non permutabile con A chiameremo *scarto di B dalla permutabilità* il nuovo operatore

$$B' = AB - BA.$$

Lo scarto gode delle proprietà analoghe alla derivata:

$$(B + C)' = B' + C', \qquad (BC)' = B'C + BC':$$

in questa analogia i permutabili con A si comportano come le costanti.

È da notare però che un operatore non è in generale permutabile col proprio scarto; si avrà quindi in generale

$$(B^m)' = B'B^{m-1} + BB'B^{m-2} + \dots + B^{m-1}B'$$

e si avrà $(B^m)' = mB^{m-1}B'$ soltanto se B e B' sono permutabili.

IV. **Scarti di ordine superiore.** — Porremo

$$B'' = (AB - BA)' = A^2B - 2ABA + BA^2 \tag{1}$$

e lo chiameremo *scarto di B di secondo ordine*; in generale definiamo per induzione lo scarto d'ordine m

$$B^{(m)} = AB^{(m-1)} - B^{(m-1)}A.$$

Si dimostra anche per induzione che, analogamente a (1),

$$B^{(m)} = \Sigma (-1)^k \binom{m}{k} A^{m-k}BA^k. \tag{2}$$

A causa della rilevata analogia fra lo scarto e la derivazione, vale per lo scarto m–esimo del prodotto la formola analoga a quella di LEIBNIZ

$$(BC)^{(m)} = B^{(m)}C + mB^{(m-1)}C' + \binom{m}{2}B^{(m-2)}C'' + \ldots + BC^{(m)}.$$

Diremo che un operatore B è *permutabile d'ordine* m rispetto ad A quando il suo scarto m–esimo è nullo.

V. **Operatori permutabili di secondo ordine.** — Un permutabile di secondo ordine R è definito dalla condizione

(3) $$AR - RA = P:$$

in particolare chiamiamo U il permutabile di secondo ordine per cui

(4) $$AU - UA = 1 \text{ [1]};$$

esso può chiamarsi *l'operatore associato di* A ($-A$ sarà quindi l'associato di U).

U è determinato a meno di un permutabile additivo arbitrario P_1, perchè da

$$AU - UA = 1, \qquad AU_1 - U_1A = 1$$

segue

$$A(U_1 - U) - (U_1 - U)A = 0;$$

reciprocamente

$$A(U + P_1) - (U + P_1)A = AU - UA = 1.$$

Ogni altro permutabile di secondo ordine R è della forma

$$R = PU + P_1 \qquad \text{ovvero} \qquad R = UP + P_1:$$

infatti moltiplicando (4) per P a sinistra o a destra si ha

$$APU - PUA = P, \qquad AUP - UPA = P,$$

e, sottraendo da (3),

$$A(R - PU) - (R - PU)A = 0, \qquad A(R - UP) - (R - UP)A = 0.$$

VI. **Operatori permutabili d'ordine** m. — La forma generale di un operatore permutabile d'ordine m è

(5) $$B = P_0U^m + P_1U^{m-1} + \ldots + P_{m-1}U + P_m.$$

Osserviamo infatti che, essendo $U' = 1$, U e U' sono permutabili: quindi (III) $(U^m)' = mU^{m-1}$; perciò si può calcolare lo scarto

[1] Esso esiste certamente tosto che esiste un R che soddisfi a una equazione (3) con P invertibile, poichè basta prendere $U = P^{-1}R$ ovvero $U = RP^{-1}$.

di (5) operando sul secondo membro di (5) colla regola di derivazione rispetto alla variabile U:

$$B' = mP_0U^{m-1} + (m-1)P_1U^{m-2} + \dots + P_{m-1}; \tag{6}$$

se dunque si ammette già provato che (6) rappresenta un permutabile d'ordine $m-1$, ne risulta che (5) rappresenta un operatore permutabile d'ordine m.

Viceversa, se B è permutabile d'ordine m, B' è permutabile d'ordine $m-1$; se ammettiamo provato che di conseguenza esso è della forma

$$B' = P_0U^{m-1} + P_1U^{m-2} + \dots + P_{m-1},$$

ponendo

$$B_1 = \frac{1}{m} P_0 U^m + \frac{1}{m-1} P_1 U^{m-1} + \dots + P_{m-1} U$$

risulta $B_1' = B'$ e quindi $(B-B_1)' = 0$, $B - B_1 = P_m$, $B = B_1 + P_m$.

Considerando, come si disse, *gli operatori permutabili con A come analoghi delle costanti, e considerando l'operatore U come analogo della variabile* (conformemente alla proprietà $U' = 1$) *gli operatori d'ordine m prendono dunque il posto delle funzioni razionali intere (polinomi) di grado m.*

VII. **Semipermutabilità.** — Ogni operatore P permutabile con un dato A è pure permutabile con tutte le sue potenze: evidentemente non è vero l'inverso: si presenta la domanda: come dipende il gruppo dei permutabili con A^p dal gruppo dei permutabili con A? Questa domanda ha una certa analogia col problema delle equazioni binomie [cfr. VIII], ma la sua trattazione per un p qualunque presenta notevoli difficoltà. Tratteremo il caso di $p=2$.

Da

$$A^2H = HA^2 \tag{7}$$

segue

$$A(AH - HA) = (HA - AH)A$$

ossia

$$AH' + H'A = 0.$$

Reciprocamente se H' è tale che $AH' + H'A = 0$, H è permutabile con A^2.

Un operatore R che soddisfi alla uguaglianza

$$AR + RA = 0 \tag{8}$$

si dirà *semipermutabile* con A: si ha $A^2R = -ARA = RA^2$: quindi ogni semipermutabile soddisfa pure a (7).

Da (7) si ha pure

$$A(AH + HA) - (AH + HA)A = 0$$

e viceversa; quindi condizione necessaria e sufficiente affinchè si verifichi (7) è anche che $AH + HA$ sia permutabile. Ponendo

$$AH + HA = P = \frac{1}{2} AA^{-1}P + \frac{1}{2} A^{-1}PA,$$

risulta

$$A\left(H - \frac{1}{2} A^{-1}P\right) + \left(H - \frac{1}{2} A^{-1}P\right)A = 0.$$

Quindi $H - \frac{1}{2} A^{-1}P$ è semipermutabile con A: poniamo

$$H - \frac{1}{2} A^{-1}P = R \qquad \frac{1}{2} A^{-1}P = P_1;$$

segue

$$H = R + P_1. \tag{9}$$

Reciprocamente se H ha questa forma

$$A^2H = A^2R + A^2P_1 = RA^2 + P_1A^2 = HA^2;$$

quindi (9) *è la forma generale dei permutabili con* A^2.

L'inverso di un semipermutabile è semipermutabile; il prodotto di due semipermutabili è permutabile; infatti da (8) si ha

$$R^{-1}ARR^{-1} = -R^{-1}RAR^{-1} \qquad \text{ossia} \qquad R^{-1}A = -AR^{-1};$$

da (8) e da

$$AR_1 = -R_1A$$

si ha

$$ARR_1 = -RAR_1 = RR_1A.$$

Ne segue che

$$R_1 = R_1R^{-1}R = PR$$

e cioè ogni semipermutabile con A si ottiene da uno di essi (che abbia inverso) mediante moltiplicazione per un permutabile; è evidente la proposizione inversa; quindi, indicando con I un semipermutabile fisso, la forma generale dei permutabili con A^2 diviene

$$H = PI + P_1.$$

VIII. Un esempio notevole. — Abbiamo già ricordato (II) le dilatazioni L definite da

$$L(\varepsilon_n) = h_n\varepsilon_n$$

e l'operatore M definito da

$$M(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1};$$

il suo inverso è M^{-1} definito da

$$M^{-1}(\varepsilon_0) = 0 \qquad M^{-1}(\varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_n .$$

Essendo L una dilatazione assegnata, poniamo $Q = M^{-1}L$; risulta

$$Q(\varepsilon_0) = 0, \qquad Q(\varepsilon_{n+1}) = h_{n+1}\varepsilon_n, \qquad Q^{-1}(\varepsilon_n) = \frac{1}{h_{n+1}}\varepsilon_{n+1} .$$

Se P è permutabile rispetto a Q dovrà essere

$$QP(\varepsilon_0) = PQ(\varepsilon_0) = 0, \qquad P(\varepsilon_0) = b_0\varepsilon_0,$$
$$QP(\varepsilon_1) = PQ(\varepsilon_1) = h_1 P(\varepsilon_0), \qquad P(\varepsilon_1) = b_1\varepsilon_0 + b_0\varepsilon_1 ;$$

in generale

$$QP(\varepsilon_n) = PQ(\varepsilon_n) = h_n P(\varepsilon_{n-1}). \qquad P(\varepsilon_n) = b_n\varepsilon_0 + h_n Q^{-1}P(\varepsilon_{n-1})$$

dove $b_0\ b_1 \dots b_n$ sono arbitrarie: se ne deduce per induzione

$$(10) \quad P(\varepsilon_n) = b_n\varepsilon_0 + b_{n-1}\frac{h_n}{h_1}\varepsilon_1 + b_{n-2}\frac{h_n h_{n-1}}{h_1 h_2}\varepsilon_2 + \dots + b_1\frac{h_n}{h_1}\varepsilon_{n-1} + b_0\varepsilon_n .$$

Ponendo $\varepsilon_n = x^n$, $h_n = n$ le $P(\varepsilon_n)$ si riducono ai polinomi di APPELL.

Si verifica con un calcolo immediato che un operatore U associato di Q (V) è quello definito da

$$U(\varepsilon_n) = \frac{n+1}{h_{n+1}}\varepsilon_{n+1} .$$

Siamo dunque in grado (V, VI) di assegnare tutti i permutabili d'ordine qualunque rispetto a Q.

Si vede anche subito che un operatore semipermutabile con Q è quello I definito da

$$I(\varepsilon_n) = (-1)^n\varepsilon_n ;$$

è $I^2 = 1$. Più generalmente, se λ è radice m-ma primitiva dell'unità, l'operatore J_m definito da

$$J_m(\varepsilon_n) = \lambda^n\varepsilon_n$$

è permutabile con Q^m e non con una potenza inferiore di Q: si ha infatti

$$J_m Q^p(\varepsilon_n) = \lambda^{n-p} h_n h_{n-1} \dots h_{n-p+1}\varepsilon_{n-p},$$
$$Q^p J_m(\varepsilon_n) = \lambda^n h_n h_{n-1} \dots h_{n-p+1}\varepsilon_{n-p}$$

(convenendo che le ε con indice negativo rappresentino 0); quindi

$$(Q^p J_m - J_m Q^p)(\varepsilon_n) = \lambda^{n-p}(\lambda^p - 1) h_n h_{n-1} \dots h_{n-p+1}\varepsilon_{n-p}$$

sarà $= 0$ sempre e solo che $\lambda^p = 1$.

Dall'osservazione che

$$Q^p(\varepsilon_n) = h_n h_{n-1} \dots h_{n-p+1}\varepsilon_{n-p}$$

risulta anche, sostituendo in (10),

$$P(\varepsilon_n) = b_0\varepsilon_n + \frac{b_1}{h_1} Q(\varepsilon_n) + \frac{b_2}{h_1 h_2} Q^2(\varepsilon_n) + \ldots + \frac{b_n}{h_1 h_2 \ldots h_n} Q^n(\varepsilon_n) :$$

ed osservando che, per $p > n$, $Q^p(\varepsilon_n) = 0$, si può scrivere questo polinomio simbolico sotto la forma di serie

$$P(\varepsilon_n) = b_0\varepsilon_n + \frac{b_1}{h_1} Q(\varepsilon_n) + \ldots + \frac{b_n}{h_1 h_2 \ldots h_n} Q^p(\varepsilon_n) + \ldots ;$$

si ottiene così per gli operatori permutabili con Q l'espressione simbolica

(11) $$P = \sum_0^\infty \frac{b_n}{h_1 h_2 \ldots h_n} Q^n ;$$

seguendo APPELL si può chiamare

$$f(z) = \sum \frac{b_n z^n}{h_1 h_2 \ldots h_n}$$

la *serie* (o *funzione*) *generatrice dell'operatore* P. Mediante questa espressione può anche calcolarsi $PU - UP$; infatti, prendendo U come operazione fondamentale, si ha (III)

$$UQ - QU = Q' = -1 \qquad UQ^m - Q^m U = mQ^{m-1}Q' = -mQ^{m-1}$$

e perciò

$$PU - UP = \sum \frac{nb_n}{h_1 h_2 \ldots h_n} Q^{n-1} ;$$

si calcola cioè $PU - UP$ derivando formalmente la serie (11) rispetto a Q considerata come variabile.

Chiamando *elemento invariante di* Q un ω tale che

(12) $$Q(\omega) = k\omega \qquad k \text{ costante},$$

sarà

$$Q^n(\omega) = k^n\omega$$

e quindi

$$P(\omega) = \sum \frac{b_n k^n}{h_1 h_2 \ldots h_n} \omega = f(k)\omega.$$

Scrivendo ω come serie delle ε_n a coefficienti indeterminati

$$\omega = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \ldots$$

e sostituendo in (12) si ottiene che deve essere

$$c_1 h_1 \varepsilon_0 + c_2 h_2 \varepsilon_1 + \ldots = k(c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \ldots),$$

onde la relazione ricorrente

$$h_n c_n = k c_{n-1}$$

è quindi

$$\omega = c \sum \frac{k^n}{h_1 h_2 \dots h_n} \varepsilon_n ;$$

ne segue

$$U(\omega) = c\left(\frac{1}{h_1}\varepsilon_1 + \frac{2k}{h_1 h_2}\varepsilon_2 + \dots\right) = \frac{d}{dk}\omega$$

$$UP(\omega) = Uf(k)\omega = f(k)U(\omega) = f(k)\frac{d}{dk}\omega.$$