Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Francesco Severi

Il rango di una corrispondenza a valenza sopra una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 161–169.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_161_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Il rango di una corrispondenza a valenza sopra una superficie.

Nota di Francesco Severi (a Roma).

Sunto. - *Il rango d'una corrispondenza T a valenza zero vien considerato sotto varii aspetti. Si tratta in fondo di un carattere intimamente legato alla base delle curve tracciate sulla superficie. Mediante la base si determina la corrispondenza degenere S di 2ª specie associata a T e il rango di S, che è uguale a quello di T. Per una corrispondenza a valenza qualunque la questione del rango si riduce notoriamente alla questione analoga per una corrispondenza a valenza zero.*

1. Nella teoria delle corrispondenze fra superficie, quale ho costruito mediante le serie di equivalenza [1], il rango d'una corrispondenza a valenza zero T, sopra una superficie algebrica F, vien considerato sia proiettivamente, che invariantivamente.

Dal punto di vista proiettivo ho cominciato col considerar quelle che ho chiamato *corrispondenze di Zeuthen a valenza zero.* In una T siffatta il gruppo X' degli omologhi di un punto x variabile su F, è staccato sulla superficie (fuori di pu[illegible] fissi, che possono o no includersi in X') da una varietà ad r — [illegible] dimensioni $M(x)$, mobile in una famiglia, entro lo S_r di F. Pe[illegible] $= 3$ si hanno le corrispondenze di Zeuthen propriamente dette.

Il gruppo X' diviene in tutto o in parte indeterminato, quando $M(x)$ sega F lungo una curva, oltrechè in eventuali punti isolati. L'indeterminazione si circoscrive con opportune considerazioni di limite, che non occorre qui ricordare.

(1) Cfr. i miei lavori: *A) La teoria delle serie di equivalenza e delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica,* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 7 Note, sedute del 5 marzo e del 2 giugno 1933-XI; *B) La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche,* « Memorie della R. Acc. d'Italia », 1934-XII.

Se vi sono su F infiniti *punti eccezionali* x, i cui gruppi omologhi sieno, nel senso espresso, indeterminati, il principio di corrispondenza, com'è formulato da ZEUTHEN, cade in difetto. Ricordo che Zeuthen dà la formula $u = \alpha + \beta + \delta$, ove u è il numero dei punti uniti (che noi valutiamo virtualmente, se è infinito); α, β son gl'indici di T e δ è uguale ad $\varepsilon : m$, ε essendo il numero delle coppie x, x', che hanno x, x' rispettivamente su due date sezioni iperpiane di F ed m è l'ordine della superficie. Il carattere δ è appunto quello che io chiamo *rango* di T e che ho considerato sotto ipotesi invariantive ben più generali (ved. più innanzi).

Orbene, quando T possegga infiniti punti eccezionali, il rango $\delta = u - \alpha - \beta$ non ha più il significato geometrico assegnatogli da Zeuthen ed il numero ε non è neppure generalmente divisibile per m.

Ma anche quando δ abbia il ricordato significato, questo non può trasportarsi dal campo proiettivo al campo invariantivo, come in un primo tempo ([2]) il geniale geometra credeva. Non è vero cioè che δ sia uguale al quoziente del numero delle coppie x, x', che hanno x, x' rispettivamente su due curve di un fascio lineare qualsiasi $|C|$ di F, diviso pel grado virtuale del fascio.

Invero, la natura proiettiva della definizione di T pone un legame inscindibile fra T ed il sistema lineare $|E|$ delle sezioni iperpiane di F. Tale legame è espresso da questa proprietà invariantiva: la serie d'equivalenza $|X'|$ è multipla della serie caratteristica $|(E, E)|$. Passando da $|E|$ ad un altro sistema lineare $|C|$, questo legame sparisce e δ non può conservare rispetto a $|C|$ il significato che aveva rispetto ad $|E|$.

Le esposte rettifiche al risultato di Zeuthen son contenute nei miei precedenti lavori sulla teoria generale delle corrispondenze fra superficie. Ma la loro rievocazione non è fuor di luogo, perchè anche dopo questi lavori si è talvolta continuato ad usare quel risultato nella sua forma incompleta o si sono erroneamente valutate la natura e l'ampiezza della nozione invariantiva di rango ([3]).

([2]) Dico in un primo tempo, perchè successivamente l'A. deve essersi accorto dell'errore, in quanto nel *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* (Teubner, 1914), alle pagg. 279 e segg., dove si parla delle corrispondenze fra superficie, non si fa più cenno dell'interpretazione invariantiva del rango.

([3]) Cfr. ALBANESE, *Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche*, Memoria II (« Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », 1934-XII). Tale Memoria è posteriore alla mia Memoria A), dove le critiche a ZEUTHEN son già espresse e dove a pag. 763 è perfino addotto un esempio concreto in cui la formulazione di ZEUTHEN non vale. Cfr. al-

Ed è anche per questo motivo che ora torno sulla stessa nozione, illustrandone qualche altro aspetto.

2. Occorrono, per chiarezza, taluni richiami.

Serie d'equivalenza su F è una totalità di gruppi di punti esprimibili con una combinazione lineare a coefficienti interi (positivi o negativi) di gruppi variabili in altrettante serie elementari; ed una *serie elementare* è formata dai gruppi d'intersezione delle curve di due sistemi lineari di dimensioni ≥ 0 (astrazion fatta da eventuali punti fissi).

Una T dicesi *a valenza zero* quando il gruppo X' degli omologhi di x in T, si muove in una serie d'equivalenza. La definizione ha manifesto carattere invariantivo. È poi chiaro che una combinazione lineare di corrispondenze a valenza zero, è a valenza zero.

Infine ricordo che le corrispondenze *degeneri* ∞^2 su F sono di tre specie. Una corrispondenza *di 1ª specie* associa ai punti x di F gruppi X' di una curva Γ' della superficie; una corrispondenza *di 2ª specie* è la totalità delle coppie x, x' di due curve Γ, Γ' di F (prodotto $\Gamma \times \Gamma'$) o una combinazione lineare a coefficienti interi (positivi o negativi) di prodotti siffatti; una corrispondenza *di 3ª specie* associa ai punti x di F un gruppo di punti fissi della superficie.

Le corrispondenze di 2ª e 3ª specie son tutte a valenza zero. Le corrispondenze di 1ª specie son a valenza zero se i gruppi X' appartengono ad una serie di equivalenza curvilinea o, più generalmente, ad una serie curvilinea di equivalenza superficiale.

3. Chiamo *rango* d'una corrispondenza a valenza zero, d'indici α, β, avente un numero virtuale u di punti uniti, la differenza $u - \alpha - \beta$. Dalla definizione segue che il rango della corrispondenza a valenza zero combinazione lineare di più altre a valenza zero, è la combinazione lineare, cogli stessi coeffi[illegible] dei ranghi di queste.

tresì TODD, *Algebraic correspondences between algebraic varieties* (« Annals of Mathematics », 1935). Questo Autore crede di poter dedurre dalla bella formula topologica di coincidenza di LEFSCHETZ il principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza zero sotto le mie ipotesi generali invariantive, mentre nel fatto il suo ragionamento riguarda soltanto le corrispondenze di Zeuthen con un numero finito di punti eccezionali, alle quali vien data una portata che non hanno. La deduzione della formula relativa al caso generale, dalla formula di LEFSCHETZ, è fatta al n. 8 di questa Nota; ma negli elementi geometrici della deduzione c'è già quanto basta per ottenere la dimostrazione puramente geometrica della formula e il suo significato funzionale, come risulta dai miei precedenti lavori.

Dare *un altro* significato geometrico di δ, è la stessa cosa che dimostrare il principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza zero. Ecco in breve, e con qualche complemento, come la questione è risoluta nei miei precedenti lavori.

Anzitutto il rango d'una corrispondenza degenere di 3ª specie è nullo, perchè il numero dei punti uniti uguaglia l'unico indice non nullo. Il rango d'una corrispondenza degenere di 2ª specie, prodotto delle coppie di punti x, x' di due curve C, C', è dato da $[C, C']$, perchè il gruppo dei punti uniti è (C, C') e gl'indici son ambedue nulli. Il rango d'una corrispondenza degenere di 1ª specie a valenza zero, che associ agli x di F i gruppi X' di una serie d'equivalenza (curvilinea o superficiale) sopra una curva irriducibile Γ di F, è dato dal numero dei gruppi X' corrispondenti a punti x di Γ, che passan per un generico punto della curva (ved. pel caso in cui la serie degli X' sia di equivalenza curvilinea il n. 24 della Memoria A) e pel caso generale il n. 7 di questa Nota).

4. Ciò premesso, torniamo ad una corrispondenza T_0 di Zeuthen, a valenza zero. S'essa possiede infiniti punti eccezionali, questi son distribuiti sopra una curva, irriducibile o riducibile di F. In tal caso trasformando la $M(x)$ col gruppo continuo delle omografie di S_r ed associando al punto x il gruppo $\overline{X}'$ staccato dalla trasformata $\overline{M}(x)$ di $M(x)$, mediante un'omografia generica, si ha su F una nuova corrispondenza di Zeuthen, T, a valenza zero, senza punti eccezionali (n. 21 della A)). Entro la varietà a quattro dimensioni $F \times F'$ (ove F' è una copia di F) le T appartengono ad un sistema d'equivalenza $|T|$, a cui appartiene pure T_0, come corrispondenza limite della generica T. Ma quando T_0 ha infiniti punti eccezionali, passando al limite per $T \to T_0$, da T si posson distaccare talune componenti degeneri, di una o di altra specie. *Noi considereremo come corrispondenza di Zeuthen, non la originaria T_0, ma il limite completo di T*; e diremo che così *si fanno sparire virtualmente i punti eccezionali*.

Con tale convenzione, T_0 viene ad avere gli stessi indici α, β di T e lo stesso numero virtuale u di punti uniti. La T muta ogni sezione iperpiana E di F in una curva del sistema $|\delta E|$ e $\delta = u - \alpha - \beta$ è il rango di T e di T_0, il quale vien così definito alla maniera di Zeuthen.

Osservazione. — Sia Z la corrispondenza combinazione lineare di corrispondenze degeneri, che occorre aggiungere a T_0 per ottenere il limite completo di T. Le componenti di 2ª e 3ª specie di Z son a valenza zero e quindi risulta a valenza zero anche la combinazione lineare delle corrispondenze degeneri di 1ª specie, che eventualmente figurano in Z, perchè tale combinazione è differenza di due corrispondenze a valenza zero.

5. Vediamo ora *come si ottenga proiettivamente il significato geometrico del rango d'una qualunque corrispondenza a valenza zero* T. La definizione della serie d'equivalenza che contiene i gruppi X', sopra un assegnato modello proiettivo di F, permette di esprimere T con una relazione del tipo:

(1) $$T \equiv \Sigma \lambda_i T_i \quad (\lambda_i \text{ interi positivi o negativi}),$$

ove T_i associa al generico x di F un gruppo X_i' mobile in una serie elementare [4].

Il ragionamento di TODD [citato nella nota [3]] si svolge da questo (ch'è il mio punto di partenza) come se ogni T_i fosse una corrispondenza di Zeuthen (e per giunta con un numero finito di punti eccezionali o completata come al n. 4); mentre in generale non è così. Invero, una serie elementare σ è bensì segata su F da una M_{r-2} variabile in una famiglia; ma per ottenere i gruppi di σ si deve generalmente escludere dal gruppo delle intersezioni variabili un gruppo *semifisso* (mobile cioè in una serie d'equivalenza curvilinea) ed un gruppo fisso (n. 2 della A)). Ora quest'ultimo non dà nessuna noia, mentre *l'esistenza del gruppo semifisso altera completamente la natura della corrispondenza.*

Il gruppo X' degli omologhi di x non è invero più esprimibile soltanto come multiplo di un gruppo caratteristico (E, E) del sistema $|E|$ delle sezioni iperpiane di F; ma in funzione di un tal gruppo e di un gruppo variabile in una serie d'equivalenza curvilinea. Il semplice legame fra T ed $|E|$ sparisce e la definizione proiettiva di rango T va radicalmente cangiata.

Se le cose procedessero come ha creduto il dott. TODD, ogni serie d'equivalenza si ridurrebbe puramente e semplicemente ad un multiplo della serie $|(E, E)|$: cosa manifestamente assurda.

Nel secondo membro della (1) compaiono dunque generalmente talune corrispondenze degeneri a valenza zero, di una o più delle tre specie considerate, insieme a corrispondenze di Zeuthen a valenza zero senza punti eccezionali. E siccome è noto (nn. 3, 4) il significato del rango δ_i di ogni T_i, il rango δ di T ha un preciso significato geometrico fornito dalla relazione:

$$\delta = \Sigma \lambda_i \delta_i .$$

Così è proiettivamente determinato δ.

[4] Si può anzi scrivere $T \equiv S - U - V$, ove S associa ad x un gruppo d'una serie elementare superficiale; U un gruppo d'una serie elementare curvilinea; V un gruppo fisso. Ma quest'ulteriore riduzione è qui inutile.

6. *Il significato invariantivo del rango* δ *d'una corrispondenza a valenza zero* illumina più a fondo la natura di questo carattere, mostra la sua inscindibile connessione colla base delle curve tracciate su F e condanna *a priori* all'insuccesso ogni ricerca di definizioni sempliciste di δ.

Ricordo anzitutto l'equivalenza fondamentale (n. 16 della *B)*):

$$T \equiv X \times F' + X' \times F + S, \tag{2}$$

che esprime qualunque corrispondenza T a valenza zero, mediante le corrispondenze degeneri di 3^a specie $X \times F'$ e $X' \times F$ e una corrispondenza degenere di 2^a specie S; ove X, X' son i gruppi degli omologhi in T e in T^{-1} di un punto x scelto su F. La corrispondenza S *associata* a T è definita, entro al prodotto $F \times F'$, a meno d'un equivalenza.

Poichè $X \times F'$, $X' \times F$ hanno rango nullo, il rango di T è uguale al rango di S. Ora, se $C_1, \ldots, C_\rho$; $C_1', \ldots, C_\rho'$ son due basi intermediarie delle curve di F (si può anche prendere $C_i' = C_i$, purchè C_i' si pensi sulla copia F' di F), risulta:

$$\mu S \equiv \mu \sum_{i, j=1}^{\rho} \lambda_{ij} C_i \times C_j', \tag{3}$$

ove $\equiv$ denota l'equivalenza algebrica e μ è un conveniente intero. Onde viene:

$$\text{rango } T = \text{rango } S = \Sigma \lambda_{ij} [C_i, C_j'].$$

Quest'espressione invariantiva esaurisce sotto ogni aspetto la questione del rango.

7. La deduzione, fatta da Todd, del principio di corrispondenza per le corrispondenze di Zeuthen a valenza zero, virtualmente prive di punti eccezionali (chè tale è, come ho detto, la portata della deduzione) dalla formula topologica di coincidenza di Lefschetz, suggerisce talune considerazioni, che caratterizzan più intimamente le corrispondenze di Zeuthen, virtualmente prive di punti eccezionali.

Se T è una tal corrispondenza sulla F di S_r, le $M(x)$ corrispondenti ai punti x d'una sezione iperpiana E, riempiono un'ipersuperficie, il cui ordine δ uguaglia il rango di T, sicchè E trasformasi in δE. Analogamente, *mancando (effettivamente o virtualmente) i punti eccezionali*, una curva algebrica qualunque C di F trasformasi in un multiplo di E. Più in generale il trasformato $T[\Gamma]$ di un ciclo superficiale qualunque Γ di F, è omologo ad un multiplo di E, perchè il ciclo a $2r-2$ dimensioni descritto in S_r da $M(x)$, mentre x descrive Γ, è omologo ad un multiplo d'un iperpiano

Questa proprietà, che lega la corrispondenza ad un sistema lineare privilegiato, mostra quale scarso grado di generalità abbiano le corrispondenze di Zeuthen a valenza zero.

Invero, una T qualsiasi a valenza zero è vincolata, rispetto ai cicli superficiali, alla sola condizione che il trasformato di un ciclo qualunque, mediante T, sia algebrico: mentre, se T è una corrispondenza di Zeuthen (effettivamente o virtualmente priva di punti eccezionali), essa è vincolata a mutare ogni ciclo superficiale in un multiplo di un *dato* ciclo algebrico.

Viceversa, se T è a circolazione lineare nulla e gode della particolare proprietà che esista su F una curva algebrica E, privilegiata nel senso esposto, dal ragionamento di TODD segue che il rango $\delta = u - \alpha - \beta$ si può definire (indipendentemente dal fatto che T sia a valenza o a pseudovalenza nulla) come il quoziente del numero delle coppie x, x' di punti omologhi in T aventi x sopra E ed x' sopra un'altra curva equivalente ad E (eventualmente coincidente con E), diviso pel grado di E. Enuncieremo dunque:

Tutte le volte che una corrispondenza $T(\alpha, \beta)$, a circolazione lineare nulla, gode della proprietà di mutare ogni ciclo superficiale di F in un multiplo d'una data curva algebrica E, in relazione covariante con T, il numero virtuale dei punti uniti di T è espresso da $u = \alpha + \beta + \delta$, ove δ è il quoziente del numero delle coppie x, x' situate in E, diviso pel grado virtuale di E.

In queste condizioni si trovano le corrispondenze di Zeuthen a valenza zero (effettivamente o virtualmente prive di punti eccezionali) e le corrispondenze degeneri a valenza zero; cioè tutte le corrispondenze mediante cui si può linearmente comporre una corrispondenza a valenza zero qualunque. Però la curva covariante varia generalmente dall'una all'altra componente.

Nel caso d'una corrispondenza degenere di 1ª specie, che muti i punti x nei gruppi X' d'una curva irriducibile E, ogni ciclo a due dimensioni di F è mutato in E o in un multiplo di E. In particolare, se per un punto generico di E passano δ gruppi X' corrispondenti ai punti x di E, la curva E è mutata da T in δE. Onde quando T sia a circolazione nulla, vale la conclusione precedente.

Nel caso d'una corrispondenza degenere di 2ª specie, prodotto di due curve irriducibili C, C', T muta ogni ciclo superficiale in un multiplo di C'; e in particolare C' vien mutata in $[C, C']C'$, perchè i punti x situati su C' non sono che i punti del gruppo (C, C') e ognuno di essi ha per omologo C'. Pertanto anche dall'attuale punto di vista il rango di $C \times C'$ risulta $[C, C']$.

Infine nel caso d'una corrispondenza degenere di 3ª specie è chiaro che ogni ciclo superficiale vien mutato in un ciclo nullo, e il rango è nullo.

8. Vediamo in ultimo come possa dedursi la formula di coincidenza da me trovata per ogni corrispondenza T a valenza zero, dalla formula topologica di coincidenza.

Conserviamo le notazioni del n. 6 supponendo $C_i' = C_i$. Si denoti inoltre con ν_i l'indice di KRONECKER $[\Gamma, C_i]$ relativo ad un ciclo a due dimensioni, Γ, di F. Allora la corrispondenza $C_i \times C_j'$ muta Γ in $\nu_i C_j$, e siccome $X \times F'$ e $X' \times F$ mutano Γ in un ciclo nullo, pel trasformato $T(\Gamma)$ di Γ risulta:

$$T(\Gamma) \backsim \sum_{i,j} \lambda_{ij} \nu_i C_j,$$

e quindi:

$$T(\Gamma^h) \backsim \sum_{i,j} \lambda_{ij} \nu_i^h C_j, \qquad (h = 1, 2, \ldots, R),$$

ove $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots, \Gamma^R$ costituiscono una base intermediaria dei cicli bidimensionali di F. Supposto, com'è lecito, $\Gamma^h = C_h$ $(h = 1, \ldots, \rho)$, essendo gli altri $R - \rho$ cicli Γ indipendenti dai cicli algebrici, viene:

$$T(C_h) \backsim \sum_{i,j} \lambda_{ij} \nu_i^h C_j \qquad (h = 1, \ldots, \rho); \tag{4}$$

$$T(\Gamma^h) \backsim \sum_{i,j} \lambda_{ij} \nu_i^h C_h + 0 \cdot \Gamma^{\rho+1} + \ldots + 0 \cdot \Gamma^R \qquad (h = \rho + 1, \ldots, R). \tag{5}$$

Pertanto la traccia δ della matrice quadrata dei coefficienti delle omologie esprimenti i trasformati dei cicli Γ^h, è data da

$$\delta = \sum_{i,j} \lambda_{ij} [C_i, C_j]. \tag{6}$$

E siccome, per esser T a circolazione lineare nulla, la formula topologica delle coincidenze (virtuali) di T, porge $u = \alpha + \beta + \delta$, e la (6) è l'espressione stessa del rango trovata nel n. 6, si conclude col principio di corrispondenza sotto la mia forma.

9. Scriviamo la (4) così:

$$T(C_h) \backsim \sum_j C_j \sum_i \lambda_{ij} [C_i, C_h].$$

Pongasi inoltre:

$$\sum_i \lambda_{ij} [C_i, C_h] = \mu_j^h \qquad (i, j, h = 1, \ldots, \rho). \tag{7}$$

Tenuto fisso j, le (7) sono ρ equazioni lineari nelle $\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{\rho j}$ e il determinante dei loro coefficienti non è nullo, come discriminante Δ della base intermediaria $C_1, \ldots, C_\rho$. Pertanto dalle (7) ricavasi:

$$\lambda_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$$

e si conclude:

Sia $C_1, \ldots, C_\rho$ una base intermediaria delle curve tracciate su F e sia T una qualsiasi corrispondenza a valenza zero sopra la superficie. Esprimiamo per la base le trasformate delle curve della medesima; cioè:

$$\tau_h T(C_h) \equiv \tau_h \sum_j \mu_j^h C_j \qquad (\tau_h, \mu_j^h \text{ interi}),$$

($\equiv$ *segno d'equivalenza algebrica*).

Allora la corrispondenza degenere di 2ª specie S, associata a T, e che determina completamente T, dal punto di vista funzionale e da quello numerativo, è fornita da:

$$S \equiv \frac{1}{\Delta} \sum_{i,j} \Delta_{ij} C_i \times C_j$$

($\equiv$ *segno d'equivalenza razionale*),

ove Δ è il discriminante della base e Δ_{ij} il determinante dedotto da Δ sostituendo $\mu_j^1, \mu_j^2, \ldots, \mu_j^\rho$ alla i-esima verticale.

I numeri interi Δ_{ij} son tutti divisibili per Δ. Il rango di T è espresso da:

$$\delta = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,j} \Delta_{ij} [C_i, C_j].$$