Beniamino Segre


## Un teorema sopra le superficie algebriche con due fasci unisecantisi, ed una relazione fra gli angoli sotto cui si incontrano due curve algebriche tracciate su di una sfera


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **15** (1936), n.4, p. 169–173.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_169_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

# Un teorema sopra le superficie algebriche con due fasci unisecantisi, ed una relazione fra gli angoli sotto cui si incontrano due curve algebriche tracciate su di una sfera.

Nota di Beniamino Segre (a Bologna).

**Sunto.** - *L'Autore interpreta qui, sopra le suddette superficie, un complemento al principio di corrispondenza da lui ottenuto altrove.*

In questo lavoro, usufruendo di un complemento al principio di corrispondenza da me recentemente conseguito per le corrispondenze a valenza sulle curve algebriche, dimostro un teorema generale che stabilisce un semplice *legame fra le rette che toccano nei punti comuni due curve algebriche qualsiansi, di cui almeno una a valenza zero, tracciate sopra una superficie* F *contenente due fasci di curve unisecantisi;* teorema che, dal lato qualitativo, conduce all'esistenza su $F$ di notevoli *sistemi (lineari e non lineari) di curve sovrabbondanti.*

Nel caso metrico estremamente particolare in cui $F$ sia una superficie sferica, dal suddetto teorema deduco che *la somma delle cotangenti degli angoli sotto cui si tagliano due curve algebriche arbitrarie della sfera, vale sempre* $\frac{i}{2}$ *moltiplicato per un numero intero* esprimentesi semplicemente in funzione dei caratteri proiettivi di quelle, ed *è nulla quando e solo quando le due curve sferiche considerate siano fra loro algebricamente dipendenti.* Da qui — mediante proiezione stereografica di $F$ — traggo infine una *proposizione di geometria piana anallagmatica,* che generalizza un noto risultato di G. HUMBERT.

## § I. – INTORNO ALLE CURVE ALGEBRICHE DI UNA SUPERFICIE CON DUE FASCI UNISECANTESI.

**1.** Data una qualunque superficie algebrica, $F$, contenente due fasci $\{\mathcal{A}\}$ e $\{\mathcal{B}\}$ di curve unisecantisi (ossia una superficie che rappresenti senza eccezioni le coppie di punti di due curve algebriche), consideriamo su essa due curve algebriche $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, che incontrino rispettivamente le curve $\mathcal{A}$ in $\alpha$, $\alpha'$ punti e le curve $\mathcal{B}$ in $\beta$, $\beta'$ punti. Supponiamo che una (almeno) di dette curve, per es. la $\mathcal{C}'$, sia a valenza zero (condizione, questa, che è sempre soddisfatta per ogni curva di $F$ se le $\mathcal{A}$ o le $\mathcal{B}$ sono curve razionali): ciò significa che la curva composta delle $\alpha'$ curve $\mathcal{B}$ passanti pei punti comuni a $\mathcal{C}'$ e ad una $\mathcal{A}$, mutando questa, varia in un sistema lineare; ed all'uopo notoriamente occorre e basta sia soddisfatta un'equivalenza del tipo

$$\mathcal{C}' \equiv \sum_{h=1}^{\beta'} \mathcal{A}_h + \sum_{k=1}^{\alpha'} \mathcal{B}_k,$$

dove le $\mathcal{A}_h$, $\mathcal{B}_k$ sono curve dei due dati fasci (1).

Da qui tosto si ricava che il numero d'intersezione $[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ vale:

$$[\mathcal{C}, \mathcal{C}'] = \sum_{h=1}^{\beta'} [\mathcal{C}, \mathcal{A}_h] + \sum_{k=1}^{\alpha'} [\mathcal{C}, \mathcal{B}_k] = \alpha\beta' + \alpha'\beta.$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi (non restrittiva se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ non hanno fra loro alcun legame) che il gruppo dei punti comuni alle curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ considerate, consti di $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ punti distinti $U_r$ (per $r = 1, 2, \ldots,$

(1) Cfr. F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie,* « Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino », ser. II, t. 54 (1903), p. 1, n. 14.

$\alpha\beta' + \alpha'\beta$), e denotiamo ordinatamente con $c_r$, $c_r'$, $a_r$, $b_r$ le quattro rette (complanari) che toccano in $U_r$ le $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ e le curve $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ passanti per tale punto.

Ciò posto, ci proponiamo di dimostrare che:

*Gli* $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ *birapporti* $(a_r c_r c_r' b_r)$ [*tutti finiti, in quanto necessariamente risulta* $a_r \neq b_r$, $c_r \neq c_r'$] *hanno sempre per somma il numero intero* $\alpha'\beta$.

**2.** Per stabilire il teorema dianzi enunciato è intanto lecito supporre $\mathfrak{C}$ irriducibile, poichè — se $\mathfrak{C}$ fosse spezzata — l'asserto seguirebbe subito applicando il teorema stesso alle singole componenti di $\mathfrak{C}$ ed alla $\mathfrak{C}'$. Definiamo allora sulla curva irriducibile $\mathfrak{C}$ una corrispondenza algebrica, $\mathfrak{T}$, colla condizione di mutare un punto $A$ in un punto $B$ di $\mathfrak{C}$, quando la curva $\mathfrak{A}$ uscente da $A$ incontra su $\mathfrak{C}'$ la curva $\mathfrak{B}$ uscente da $B$.

La suddetta corrispondenza $\mathfrak{T}$ — manifestamente di indici $(\alpha\beta', \alpha'\beta)$ — è a valenza zero in virtù dell'ipotesi (fatta nel n. 1) che la curva $\mathfrak{C}'$ sia su $F$ a valenza zero; si vede inoltre facilmente che $\mathfrak{T}$ ammette come punti uniti (semplici) precisamente gli $\alpha\beta' + \alpha'\beta$ punti $U_r$ e che il coefficiente $\varkappa_r$ di dilatazione di $\mathfrak{T}$ in $U_r$ (²) risulta uguale al birapporto $(a_r b_r c_r c_r')$. Non v'è dunque che da applicare un risultato generale da me recentemente conseguito (³), per ottenere che, effettivamente,

$$\sum_{r=1}^{\alpha\beta'+\alpha'\beta}(a_r c_r c_r' b_r) = \sum_{r=1}^{\alpha\beta'+\alpha'\beta}\frac{1}{1-(a_r b_r c_r c_r')} = \sum_{r=1}^{\alpha\beta'+\alpha'\beta}\frac{1}{1-\varkappa_r} = \alpha'\beta.$$

**3.** Come corollario immediato del teorema precedente si ha che:

*Assegnate comunque su di una superficie algebrica* F, *che possegga due fasci di curve unisecantisi, due curve algebriche* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ *che si taglino in un gruppo* $G_n$ *di* n *punti distinti e tali che (almeno) una o l'altra di esse sia a valenza zero, tutte le curve del sistema continuo completo* $\{\mathfrak{C}\}$ *che passano per i punti di* $G_n$ *toccando* $\mathfrak{C}$ *in* $n-1$ *di questi, risultano necessariamente pure tangenti a* $\mathfrak{C}$ *nell'*n*-mo punto restante di* $G_n$.

Anche ora la condizione che $\mathfrak{C}$ o $\mathfrak{C}'$ sia a valenza zero può venir omessa (perchè automaticamente soddisfatta) quando uno

(²) Per tale nozione ved. B. SEGRE, *Invarianti topologici relativi ai punti uniti delle trasformazioni regolari fra varietà sovrapposte*, in corso di stampa nei « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei ».

(³) Cfr. B. SEGRE, *Un complemento al principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche* (Nota I), pure in corso di stampa nei « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei ».

dei due fasci di curve unisecantisi è lineare, ossia nell'ipotesi che la superficie $F$ che si considera risulti riferibile birazionalmente ad una rigata.

## § II. – Sulle curve algebriche tracciate sopra una sfera.

**4.** Il teorema del n. 1 ed il corollario del n. 3 possono naturalmente venire applicati — tenendo conto dell'osservazione finale del n. 3 — se $F$ è una quadrica non specializzata di $S_3$, i due fasci di curve unisecantisi essendo in tal caso le due schiere di generatrici della quadrica. In questo paragrafo supporremo, ancora più particolarmente, che la superficie $F$ sia una sfera reale e conserveremo tutte le notazioni del n. 1, talchè per es. $a_r$ e $b_r$ saranno le due rette isotrope uscenti da $U_r$ e situate nel piano ivi tangente ad $F$.

La sfera $F$ appare notoriamente orientata, quando si distinguano i suoi due sistemi $\{\mathfrak{A}\}$ e $\{\mathfrak{B}\}$ di generatrici ordinatamente come primo e come secondo sistema. L'angolo $\varphi_r = \widehat{c_r c_r'}$ sotto cui si tagliano in $U_r$ le curve $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ è allora pienamente determinato, a meno di multipli interi di $\pi$, e può venir calcolato mediante la classica formula di Laguerre:

$$\varphi_r = \frac{i}{2}\log(a_r b_r c_r c_r') = \frac{i}{2}\log \varkappa_r .$$

Sostituendo a $\varkappa_r$ nella relazione finale del n. 2 l'espressione $e^{-2i\varphi_r}$ che da qui ne consegue, con facile calcolo si deduce il notevole *legame*

$$\sum_{r=1}^{\alpha\beta'+\alpha'\beta} \operatorname{ctg}\varphi_r = \frac{i}{2}(\alpha'\beta - \alpha\beta'),$$

*intercedente fra gli angoli $\varphi_r$ sotto cui si tagliano nei varî punti comuni (reali od imaginari) due curve algebriche qualsiansi, fra loro non tangenti, tracciate su di una sfera.*

**5.** Il secondo membro dell'ultima formula ottenuta si annulla sempre e solo che un conveniente multiplo di $\mathcal{C}$ risulti — sulla sfera $F$ — equivalente ad un conveniente multiplo di $\mathcal{C}'$, ossia allora e soltanto allora che le curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ siano fra loro algebricamente dipendenti. Si può dunque dire che:

*Affinchè fra due curve algebriche, non tangenti, tracciate su di una sfera si abbia una dipendenza algebrica, è necessario e sufficiente che risulti zero la somma delle cotangenti degli angoli sotto cui le due curve si segano nei varî punti comuni.*

La suddetta condizione, e quindi pure la proprietà metrica che ne discende, sussiste in particolare quando ci si riferisca a due curve della sfera che siano intersezioni complete di questa con due superficie algebriche dello spazio (avendosi in tal caso $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$); ed è ben noto che nell'ultima categoria rientrano tutte le curve algebriche reali giacenti sulla sfera.

**6.** Applichiamo il corollario del numero precedente a due curve intersezioni complete della sfera $F$ con due superficie algebriche degli ordini $m$ ed $n$; ed effettuiamo nel modo solito la proiezione stereografica di $F$ da un qualunque punto non situato sulla prima di tali curve, per il quale la seconda di esse passi con una certa molteplicità $n - \nu \geq 0$ ($\nu \geq 0$). Poichè — com'è ben noto — il riferimento fra $F$ ed il piano di proiezione riesce conforme, se ne inferisce che:

*Una curva piana algebrica d'ordine* 2m *passante* m *volte per ciascuno dei due punti ciclici del suo piano, ed una qualunque curva algebrica complanare e non tangente ad essa che contenga quei due punti colla stessa molteplicità (d'altronde arbitraria)* $\nu \geq 0$, *si tagliano sempre (al finito) sotto angoli le cui cotangenti hanno per somma lo zero.*

Nel caso particolare in cui è $\nu = 0$, questa proposizione trovasi già — ottenuta per tutt'altra via — in un vecchio lavoro di G. HUMBERT [1].

[1] Cfr. G. HUMBERT, *Application géométrique d'un théorème de Jacobi.* « Journ. de Math. pures et appliquées », IV ser., t. 1 (1885), p. 347, teor. II (relativo all'ipotesi $m = 1$) e teor. IV.