Bollettino Unione Matematica Italiana

Piero Buzano

Interpretazione proiettiva dell'invariante di Mehmke

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 173–175.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Interpretazione proiettiva dell' invariante di Mehmke.

Nota di PIERO BUZANO (a Torino).

Sunto. - *Si dà una nuova e semplice interpretazione proiettiva dell' invariante di* MEHMKE *per due ipersuperficie di uno* S_n, *tangenti in un punto.*

A due ipersuperficie di uno S_n, aventi contatto ordinario in un punto O, si può collegare un invariante proiettivo di contatto costituito dal rapporto delle loro curvature totali nel punto O. Esso fu considerato per la prima volta dal MEHMKE (1) nel caso

(1) Senza dimostrazione: ved. R. MEHMKE, *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen*, « Zeitschr. für Math. u. Phys », t. 36 (1891), pp. 56-60 e 206-213. L' invariante (nel caso delle superficie) fu poi ritrovato da M. MASCHALCHI (*Un nuovo invariante proiettivo di contatto di due su-*

di due superficie di S_3: è però ovvia l'estensione a uno S_n qualunque, che lo stesso MEHMKE lascia intravedere. Di tale invariante non mi risulta si conoscano finora altri significati proiettivi ([2]) all'infuori di quello dato recentemente dal prof. TERRACINI ([3]) e legato al concetto di *densità* di una corrispondenza dualistica. In questa nota esporrò una nuova interpretazione proiettiva dello stesso invariante, la quale mi sembra interessante per la sua notevole semplicità.

Consideriamo due ipersuperficie di S_n aventi in comune un punto O ed il relativo iperpiano tangente e, assunto un sistema di *coordinate cartesiane ortogonali* $x_1, x_2 \dots x_n$, in cui il punto O sia l'origine e l'iperpiano tangente comune sia $x_n = 0$, rappresentiamole rispettivamente con i seguenti sviluppi locali:

$$(1)\qquad x_n = \sum_{1}^{n-1}{}_{ij}\, a_{ij} x_i x_j + \sum_{1}^{n-1}{}_{ijk}\, a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots ;$$

$$(2)\qquad x_n = \sum_{1}^{n-1}{}_{ij}\, b_{ij} x_i x_j + \sum_{1}^{n-1}{}_{ijk}\, b_{ijk} x_i x_j x_k + \dots ;$$

(dove i coefficienti restano invariati se se ne permutano gli indici).

I coni asintotici delle ipersuperficie (1) e (2) nel punto O, si rappresentano nell'iperpiano $x_n = 0$, rispettivamente con le seguenti equazioni:

$$(3)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{ij}\, a_{ij} x_i x_j = 0 ;$$

$$(4)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{ij}\, b_{ij} x_i x_j = 0 ;$$

e noi li supporremo *distinti* ([4]). Al loro fascio appartiene il cono:

$$(5)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{ij}\, (a_{ij} - b_{ij}) x_i x_j = 0,$$

pure individuato geometricamente in quanto esso è, nell'iper-

perficie, « Boll. Un. Mat. It. », anno XIII (1934), n. 1): essa lo ottiene come rapporto di due nuovi invarianti proiettivi indipendenti, però solo di questi dà un significato proiettivo immediato.

([2]) Salvo un caso particolare già considerato dal BOMPIANI: v. nota ([4]).

([3]) Ved. A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*, « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 71 (1935-36).

([4]) Il caso in cui tali coni coincidono, limitatamente alle superficie di S_3, è già stato considerato dal BOMPIANI: *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario*, « Atti Acc. Sc. Torino », vol. LIX (1924), e: *Sul contatto di due superficie*, « Rend. Acc. Lincei », serie 6ª, vol. XV (1932).

piano $x_n = 0$, il cono delle tangenti tripunte in O alla V_{n-2} intersezione di (1) e (2).

Consideriamo ora un cono quadrico generico nel fascio individuato dai coni (3) e (4):

$$(6) \qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{ij} (\lambda a_{ij} - b_{ij}) x_i x_j = 0 ;$$

il parametro λ corrispondente a tale cono è coordinata proiettiva nel fascio, cioè ha il preciso significato di birapporto formato dai coni (3), (4), (5), (6).

In particolare i valori di λ corrispondenti ai *coni degeneri* del fascio si ottengono annullando il discriminante:

$$| \lambda a_{ij} - b_{ij} | ,$$

e quindi il loro prodotto (prodotto delle radici di un'equazione di grado $n-1$) è:

$$I = \frac{|b_{ij}|}{|a_{ij}|},$$

dove numeratore e denominatore stanno ad indicare i discriminanti dei coni (4) e (3) e differiscono per uno stesso fattore numerico dalle curvature totali delle due ipersuperficie nel punto O, cosicchè il 2° membro coincide con l'invariante di MEHMKE. Si trae pertanto la seguente conclusione:

« *L'invariante di Mehmke per una coppia di ipersuperficie tangenti semplicemente in un punto è uguale al prodotto dei birapporti che i coni asintotici delle due ipersuperficie e il cono delle tangenti tripunte alla loro intersezione, formano con i coni degeneri del loro fascio* ». Tale interpretazione è valida anche se $n = 3$, nel qual caso i coni in esame si riducono a coppie di rette; essa viene meno solo nel caso $n = 2$.