Fabio Conforto

Sui fasci d'Halphen i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 175–177.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_175_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

Sui fasci d'Halphen i cui punti base appartengano ad una cubica ellittica degenere.

Nota di F. CONFORTO (a Roma).

Sunto. - *Si dà l'enunciato di un teorema di esistenza e di riduzione per i fasci di curve d'ordine* 3n, *dotate di nove punti* n-*pli* (*fasci d'* HALPHEN), *quando questi nove punti stiano su una cubica ellittica, degenere per acquisto di un punto doppio o per uno spezzamento qualsiasi.*

In un lavoro, in corso di stampa nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei, ho determinato tutti i tipi di fasci d'HALPHEN, i cui punti base appartengano ad una cubica ellittica degenere.

In questa breve Nota spiego il senso della nominata ricerca e dò notizia dei risultati ottenuti.

Come è noto ([1]), si chiamano fasci d'HALPHEN i fasci di curve *irriducibili* d'ordine $3n$ ($n \geq 2$), dotate di nove punti n-pli A_1, $A_2, \ldots, A_9$ giacenti su di una cubica ellittica C_3. Per costruire un fascio d'HALPHEN — diciamo ad es. un fascio di sestiche C_6 con nove punti doppi su di una data C_3 — si prendano da prima sulla C_3 otto punti doppi A_1, $A_2, \ldots, A_8$, ad arbitrio. Le ∞^3 sestiche $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ segano sulla C_3 una g_2^1, di cui ciascuna coppia offre una sola condizione alle C_6, che debbono contenerla. Pertanto, se si fissa un nono punto doppio A_9 in uno dei (quattro) punti doppi della g_2^1, esisteranno ∞^2 $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ che toccano la C_3 in A_9 e quindi ∞^1 $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2 A_9^2)$; e queste saranno effettivamente ∞^1 sestiche d'HALPHEN (cioè *irriducibili*) se il punto A_9 sia diverso dal nono punto base delle cubiche per A_1, $A_2, \ldots, A_8$.

Il ragionamento ora fatto si estende immediatamente al caso dei fasci d'HALPHEN di curve d'ordine $3n$: i punti A_9 sono qui i punti n-pli della g_n^{n-1} segata su di una $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$ dalle $C_{3n}(A_1^n A_2^n \ldots A_8^n)$; e le ∞^1 curve $C_{3n}(A_1^n A_2^n \ldots A_9^n)$ sono *irriducibili* se A_9 non sia n/h-plo per la serie segata sulla C_3 dalle curve d'ordine $3n/h$, passanti n/h volte per A_1, $A_2, \ldots, A_8$.

Nella costruzione esposta si è implicitamente supposto che la cubica C_3 sia una effettiva curva *ellittica*: da questa ipotesi si deduce infatti che le $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ segano sopra la C_3 una g_2^1 e non una g_2^2 completa. Avviene ora in certe questioni di geometria algebrica (riduzione a tipi dei sistemi lineari di curve piane e delle involuzioni piane, ricerca dell'ultimo sistema aggiunto a partire da un sistema lineare dato, ecc.) che non si sappia *a priori* se la curva C_3 sia una effettiva cubica ellittica, ovvero una cubica razionale o comunque riducibile in parti distinte o coincidenti. Ha quindi interesse il conoscere quando possa esistere un fascio d'HALPHEN con i punti base A_1, $A_2, \ldots, A_9$ giacenti su di una C_3 comunque degenere. La risposta a questo problema, al quale precisamente è dedicata la Memoria dianzi citata, è molto semplice se si premette la seguente

DEFINIZIONE. — *Una cubica* C_3 *razionale o comunque spezzata in parti distinte o sovrapposte, sulla quale siano fissati otto punti* A_1, $A_2, \ldots, A_8$ *(distinti o infinitamente vicini) si dirà virtualmente ellittica, quando il fascio delle cubiche, determinato dagli otto punti, sia un fascio di curve ellittiche irriducibili.*

([1]) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*; vol. III, pag. 195.

Posta questa definizione si riesce infatti a dimostrare il seguente

TEOREMA. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè, a partire da otto punti* $A_1, A_2, \ldots, A_8$ *(distinti o infinitamente vicini), dati ad arbitrio sopra una cubica* C_3 *razionale o comunque spezzata in parti distinte o coincidenti, si possa costruire un fascio d'Halphen di curve irriducibili d'ordine* $3n$ $(n \geq 2)$, *passanti* n *volte per* $A_1, A_2, \ldots, A_8$, *e per un nono punto* A_9 *di* C_3 (determinato da $A_1, A_2, \ldots, A_8$) *è che*, in relazione agli otto punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$, *la cubica* C_3 *sia virtualmente ellittica e che esista sulla* C_3 *una coppia neutra per le* $C_{3n}(A_1^n \ldots A_8^n)$, *costituita da due punti distinti.*

In base a questo teorema, la ricerca di tutti i tipi di fasci d'HALPHEN, i cui punti base giacciono sopra una C_3 razionale o comunque spezzata, è equivalente alla ricerca di tutte le configurazioni di otto punti della C_3 rispetto alle quali la C_3 sia virtualmente ellittica e per cui esista una coppia neutra di punti distinti per le $C_{3n}(A_1^n \ldots A_8^n)$. Questa ricerca porta ad un numero molto grande di casi possibili. Tuttavia, mediante trasformazioni cremoniane, questi casi si riducono a pochi tipi. Precisamente si trova il seguente risultato:

Un fascio d'Halphen di curve d'ordine $3n$ $(n \geq 2)$, *passanti* n *volte per nove punti* $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *di una cubica* C_3 *razionale o comunque spezzata in parti distinte o coincidenti si riduce, con successive trasformazioni quadratiche:*

a) *ad un fascio per cui* $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *giacciono su di una* C_3 *non spezzata dotata di un nodo* O; *i nove punti* $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *sono tutti distinti da* O, *ovvero uno di essi* — ad es. A_1 — *coincide con* O: *in questa ipotesi,* A_1 *è seguito da* $1 \leq i \leq 8$ *punti infinitamente vicini, dei quali* $i-1$ *si succedono sopra uno dei rami della* C_3, *passanti per* O;

b) *ad un fascio per cui* $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *giacciono su di una* C_3 *spezzata in una conica* C_2 *su cui giacciono sei punti base ed in una retta* r *che contiene tre punti base secantisi: il punto* A_1 *è un punto comune alla* C_2 *ed alla* r *ed è seguito da sei punti infinitamente vicini, cinque dei quali si succedono sopra il ramo della conica* C_2, *uscente da* A_1.

È estremamente probabile che i tipi a), b) siano cremonianamente *distinti* (1).

(1) Aggiungo sulle bozze di stampa che sono ultimamente riuscito a dimostrare la irriducibilità dei fasci del tipo b) ai fasci del tipo a); la dimostrazione verrà esposta in un prossimo lavoro.