Bollettino Unione Matematica Italiana

Filippo Odone

Forma che assumono le equazioni di Helmholtz, Weber, Cauchy per i fluidi viscosi, baroclini, soggetti a forze non conservative

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 178–182.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_178_0>

Forma che assumono le equazioni di Helmholtz, Weber, Cauchy per i fluidi viscosi, baroclini, soggetti a forze non conservative.

Nota di FILIPPO ODONE (a Fermo).

Sunto. - *Si scrivono le equazioni di* HELMHOLTZ, WEBER, CAUCHY *per i fluidi viscosi, baroclini, soggetti a forze non necessariamente conservative, adottando sia il punto di vista di* EULERO, *sia quello di* LAGRANGE. *In ultimo si calcola la circuitazione ad ogni istante lungo una linea chiusa qualunque.*

1. **Premesse.** — Consideriamo l'equazione indefinita del moto di un fluido viscoso, equazione che scriveremo sotto la forma:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}_P p + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}^2_P \mathbf{v}.$$

In questa equazione P rappresenta un punto generico appartenente alla regione di spazio occupata dal fluido all'istante generico t: $\mathbf{v}$ è la velocità in questo stesso punto e in questo stesso istante: ρ la densità: p l'intensità della pressione: $\mathbf{F}$ il vettore della forza riferita all'unità di massa; λ, μ due parametri caratteristici del fluido e che supporremo costanti. Supporremo inoltre che la forza $\mathbf{F}$ sia qualunque, non necessariamente conservativa: così pure supporremo che la densità ρ possa essere funzione, oltre che della pressione p, anche di altri parametri, cioè, adottando le denominazioni di BJERKNES (1), supporremo il fluido baroclino (ρ funzione di altri parametri, oltrechè di p) e non necessariamente barotropo (ρ funzione solo di p).

È noto che l'equazione (A) può essere considerata da due diversi punti di vista: o ritenendo le grandezze variabili (velocità, pressione...) funzioni di P e t (EULERO), ovvero ritenendo queste stesse grandezze funzioni di P_0 e t, essendo P_0 la posizione di P all'istante t_0 (LAGRANGE).

Adottando le variabili di EULERO si arriva naturalmente all'equazione di HELMHOLTZ relativa al vettore $\operatorname{rot}_P \mathbf{v}$, equazione che può essere integrata direttamente (supposto il fluido non viscoso), come ha indicato il prof. BOGGIO (2), ottenendosi così gli integrali di CAUCHY.

(1) Si veda P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, tomo III, p 562, Paris, Gauthier-Villars, 1928. Si veda pure la prefazione al volume.

(2) T. BOGGIO, *Sull'integrazione delle equazioni idrodinamiche di Helmholtz.* « Rend. della R. Accad. dei Lincei », vol. XXI, serie 6ª, marzo 1935.

Adottando le variabili di LAGRANGE si arriva invece naturalmente all'equazione di WEBER, da cui si ottengono poi facilmente gli integrali di CAUCHY.

Le equazioni di HELMHOLTZ, WEBER, CAUCHY sono note in coordinate cartesiane ortogonali nel caso di fluidi senza viscosità, baroclini e soggetti a forze anche non conservative [1]. Mi propongo di determinare la forma che assumono queste equazioni supponendo che il fluido, oltrechè essere baroclino e soggetto a forze non conservative, sia anche viscoso.

2. Variabili di Eulero; equazioni di Helmholtz e di Cauchy. — Prendiamo come variabili indipendenti P e t. L'equazione (A) può scriversi, come è ben noto, nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP}\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}_P p + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}^2_P \mathbf{v}, \tag{1}$$

che rappresenta l'equazione idrodinamica sotto la forma di Eulero.

Dalla (1) si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\operatorname{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} &= \frac{d\mathbf{v}}{dP}\frac{\operatorname{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} + \frac{\operatorname{rot}_P \mathbf{F}}{\rho} - \\ &- \frac{1}{\rho}\operatorname{rot}_P\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}_P p\right) - \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}_P\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}^2_P \mathbf{v}\right),\end{aligned} \tag{2}$$

che è la generalizzazione della equazione di Helmholtz.

La (2) può dimostrarsi nel modo seguente. È noto che [2] si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dP}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{v}^2 + \operatorname{rot}\mathbf{v}\wedge\mathbf{v} \quad \text{(si sottintende l'indice } P\text{)};$$

inoltre dall'equazione di continuità $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ risulta che $\operatorname{div}\mathbf{v}$ è funzione solo di ρ e quindi si può scrivere

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\int\frac{d(\operatorname{div}\mathbf{v})}{\rho}.$$

Applicando allora l'operatore rot ai due membri di (1) si ha:

$$\frac{\partial \operatorname{rot}\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}[(\operatorname{rot}\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}] = \operatorname{rot}\mathbf{F} - \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\right) - \mu\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}^2\mathbf{v}\right). \tag{α}$$

[1] Si veda APPELL, loc. cit., p. 596 e seguenti.
[2] BOGGIO, loc. cit..

Ma si ha pure [1]

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}[(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}] = \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho}\right) - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Da (α) e (β) risulta la (2).

Dall'equazione (2) si ottiene:

$$(3) \qquad \frac{\rho_0}{\rho} \operatorname{rot}_P \mathbf{v} + \mu \frac{dP}{dP_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}_{P_0}\left(\frac{1}{\rho} \mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \operatorname{rot}^2{}_P \mathbf{v}\right) dt =$$

$$= \frac{dP}{dP_0}\left[\operatorname{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}_{P_0}\left(\mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \mathbf{F}\right) dt - \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}_{P_0}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_{P_0} p\right) dt\right],$$

che è la generalizzazione degli integrali di Cauchy.

Per dimostrare la (3) si può seguire il procedimento indicato dal prof. Boggio nella nota già più volte citata. Basta pertanto osservare che la (2) può scriversi in questo modo:

$$(\gamma) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot}\left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}^2 \mathbf{v}\right).$$

Quest'equazione differisce da quella considerata dal prof. Boggio, cioè

$$(\delta) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\rho} + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{F}}{\rho},$$

per la sostituzione del vettore $\mathbf{F}$, col vettore $\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}^2 \mathbf{v}$.

Siccome il prof. Boggio nella sua nota non ha fatto nessuna ipotesi particolare sulla espressione del vettore $\mathbf{F}$, ne segue che la formula finale da egli ottenuta, cioè

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\operatorname{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0}\left[\frac{\operatorname{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}_{P_0}\left(\mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \mathbf{F}\right) dt\right],$$

fornirà, sostituendo $\mathbf{F}$ con $\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_P p - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}^2{}_P \mathbf{v}$, l'equazione seguente a cui deve soddisfare $\operatorname{rot}_P \mathbf{v}$:

$$(\zeta) \qquad \frac{\operatorname{rot}_P \mathbf{v}}{\rho} = \frac{dP}{dP_0}\left[\frac{\operatorname{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0}{\rho_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{rot}_{P_0}\left[\mathrm{K} \frac{dP}{dP_0}\left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_P p - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}^2{}_P \mathbf{v}\right)\right] dt\right].$$

[1] Boggio, loc. cit..

Notando che [1]

$$\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\left(\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}_P\, p\right)=\frac{1}{\rho}\,\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\,\mathrm{grad}_P\, p=\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}_{P_0} p,$$

da (ζ) si ottiene subito la (3).

3. Variabili di Lagrange; equazioni di Weber e di Cauchy. — Prendiamo come variabili indipendenti il tempo t e la posizione P_0 del punto P all'istante t_0.

L'equazione (A) può scriversi nel modo seguente:

$$\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}F-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}_{P_0} p+ \tag{4}$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\,\mathrm{grad}_{P_0}\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{v}-\frac{\mu}{\rho}\,\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\,\mathrm{rot}^2{}_P\,\mathbf{v},$$

che rappresenta l'equazione idrodinamica sotto la forma di Lagrange.

Si vede facilmente che si ottiene la (4) applicando $\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}$ ai due membri della (A) e tenendo conto che [2] $\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\,\mathrm{grad}_P\, m=\mathrm{grad}_{P_0} m$, essendo m un numero.

Dalla (4) si ha:

$$\left(\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\right)\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\mathbf{F}\cdot dt-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}_{P_0} p\,dt- \tag{5}$$

$$-\mu\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\,\mathrm{rot}^2{}_P\,\mathbf{v}\,dt+\mathrm{grad}_{P_0}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+\int\frac{(\lambda+2\mu)\cdot d\,(\mathrm{div}_P\,\mathbf{v})}{\rho}\right]dt,$$

che è la generalizzazione dell'equazione di Weber.

La (5) può dimostrarsi nel modo seguente. Anzitutto si ha [3]:

$$\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\mathbf{v}\right)-\mathrm{K}\frac{d\mathbf{v}}{dP_0}\mathbf{v}=\frac{d}{dt}\left(\mathrm{K}\frac{dP}{dP_0}\mathbf{v}\right)-\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_{P_0}\mathbf{v}^2;$$

inoltre ricordando l'equazione di continuità $\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{v}=0$, si può scrivere:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\,\mathrm{grad}_{P_0}\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{v}=\mathrm{grad}_{P_0}\int\frac{(\lambda+2\mu)\cdot d\,(\mathrm{div}_P\,\mathbf{v})}{\rho}.$$

Integrando allora la (4) da t_0 a t si ha la (5).

[1] Burali-Forti e Marcolongo, *Analisi vettoriale generale.* Vol. I: *Trasformazioni lineari,* p. 220, form. [4], Zanichelli, Bologna, 1929.

[2] Burali-Forti e Marcolongo, op. cit., p. 220, form. [4].

[3] Burali-Forti e Marcolongo, op. cit., p. 188, form. [5].

Dalla (5) si ottiene poi subito la (3), cioè la generalizzazione degli integrali di CAUCHY. Basta per questo applicare $\frac{dP}{dP_0} \operatorname{rot}_{P_0}$ ai due membri della (5) e notare che (1):

$$\frac{dP}{dP_0} \operatorname{rot}_{P_0} \mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \mathbf{v} = \left(I_3 \frac{dP}{dP_0}\right) \cdot \operatorname{rot}_P \mathbf{v},$$

$I_3 \frac{dP}{dP_0} = \frac{\rho_0}{\rho}$ (equazione di continuità), $\operatorname{rot}_{P_0} \operatorname{grad}_{P_0} m = 0$, essendo m un numero.

OSSERVAZIONE. — Dalla (5) si ottiene anche il valore, per ogni istante t, della circuitazione $\int_L \mathbf{v} \times dP$ relativa ad una linea chiusa L. Si ha:

$$\int_L \mathbf{v} \times dP = \int_{L_0} \mathbf{v}_0 \times dP_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\int_L \mathbf{F} \times dP \right) dt - \tag{6}$$
$$- \int_{t_0}^{t} \left(\int_L \frac{dp}{\rho} \right) dt - \mu \int_{t_0}^{t} \left(\int_L \frac{1}{\rho} \operatorname{rot}^2_P \mathbf{v} \times dP \right) dt,$$

essendo L_0 la posizione di L all'istante t_0.

Infatti: sia P_0 la posizione di P all'istante t_0; facendo descrivere a P la linea chiusa L, P_0 descriverà la linea chiusa L_0. Moltiplichiamo internamente i due membri della (5) per dP_0. Applicando il teorema di commutazione, cioè $\mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \mathbf{u} \times = \mathbf{u} \times \frac{dP}{dP_0}$ (essendo $\mathbf{u}$ un vettore), applicando la formula $\operatorname{grad}_{P_0} m = \mathrm{K} \frac{dP}{dP_0} \operatorname{grad}_P m$ (essendo m un numero), e scambiando l'ordine delle integrazioni, si ottiene precisamente la (6).

(1) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., p. 220, form. [8] e p. 98.