Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Giovanni Ricci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 183–187.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_183_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

GIOVANNI RICCI: *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann* (in corso di stampa in « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Scienze Fisiche e Matematiche, vol. VI (1937)).

Le lettere latine minuscole, ad eccezione di e e o, denotano numeri razionali interi, le lettere p numeri primi, le lettere K costanti assolute.

Per ogni $n \geqq 2$, esistono interi positivi g pei quali

$$n = p' + p'' + \dots + p^{(g)} \tag{1}$$

($p', p'', \dots$ uguali o distinti) e il minimo intero g per il quale vale una relazione di questo tipo è una funzione $G(n)$ di n.

È ovvio che esistono infiniti n pei quali $G(n) = 1$ e anche pei quali $G(n) = 2$ ($G(p) = 1$, $G(2p) = 2$); esistono anche infiniti n pei quali $G(n) \geqq 3$: infatti per $n = 6h + 5$, non primo, non può essere $G(n) = 1$ e neppure $G(n) = 2$ poichè, essendo $6h + 5$ dispari > 5, uno dei termini dovrebbe essere $p = 2$ mentre $6h + 5 - 2$ è divisibile per 3.

CHR. GOLDBACH congetturò [1]

$$G(2n) = 2 \qquad (n \geqq 2) \tag{2}$$

e anche (conseguenza immediata di questa)

$$1 \leqq G(n) \leqq 3 \qquad (n \geqq 2). \tag{3}$$

La verità su questa congettura è ancor oggi un mistero; e, fino a poco tempo fa, neppure si sapeva se $G(n)$ fosse superiormente limitata per $n \to +\infty$. Si deve a L. SCHNIRELMANN la notevolissima proposizione

Esiste K *tale che* G(n) $\leqq$ K.

Qual'è il minimo valore $\overline{G}$ della costante K per cui vale questa proposizione? L. SCHNIRELMANN non l'ha determinato, tuttavia ha

[1] Veramente la classica congettura di GOLDBACH è espressa da (2) e (3) quando in (1) si ammettono anche addendi della forma $p = 1$; anche in questa forma leggermente più debole (2) e (3) permangono congetture e, seguendo l'uso moderno, supponiamo p primo (quindi $\geqq 2$).

fatto un passo in questo senso. Posta la proposizione precedente nella forma equivalente

Esistono K_1 *e* K_2 *tali che per* $n > K_1$ *è* $G(n) \leq K_2$,

ci possiamo chiedere quale sia il minimo valore S (*costante di* SCHNIRELMANN) delle costanti K_2 per le quali esista l'opportuna K_1: in altre parole, ci possiamo chiedere quale sia il numero S tale che ogni intero positivo abbastanza grande si può ripartire nella somma di al più S numeri primi, mentre esistono infiniti interi positivi che non si possono ripartire nella somma di al più $S-1$ numeri primi; cioè quale sia il valore

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} G(n) = S \qquad (3 \leq S \leq G).$$

La ricerca di L. SCHNIRELMANN e, al seguito di questa, altre recentissime ([1]) sono destinate a questo problema, che è fondamentale per la valutazione di G. Le varie tappe si possono riassumere nel modo seguente

$S \leq 800 \cdot 000$ (L. SCHNIRELMANN, 1930),
$S \leq 2208$ (N. P. ROMANOFF, 1935),
$S \leq 71$ (H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK, 1936).

Più precisamente l'ultimo risultato si può enunciare così: « Ogni intero n abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$n = p' + p'' + \ldots + p^{(68)} + v, \quad 0 \leq v \leq 1019 \text{ »}$$

(ed essendo $2 \leq v + 2 \leq 1021$, $1 \leq G(v+2) \leq 3$, passando da n a $n+2$ ricaviamo $S \leq 71$).

Il citato lavoro di H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK procede, con accurata raffinatezza, sulla base del classico *metodo di* BRUN-SCHNIRELMANN ([2]) innestandovi un'idea di N. P. ROMANOFF e facendo uso di una proposizione di A. KHINTCHINE.

Noi, riprendendo tale lavoro e introducendo alcune modificazioni nella parte che riguarda il classico *metodo di* BRUN, dimostreremo che

$$S \leq 67,$$

cioè

TEOREMA (A). — *Ogni intero abbastanza grande si può rappresentare come somma di al più 67 numeri primi.*

([1]) Per notizie su questo argomento, con objezioni ai lavori precedenti, rimandiamo il lettore alla Memoria H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK che noi prendiamo come base (« Casopis Mat. a Fys. », **65** (1936), 117-140), essendoci stato impossibile vedere i lavori russi.

([2]) Ved. E. LANDAU, « Nachrichten von der Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen », 1930, 255-276.

Le modificazioni in parola si basano sulle due seguenti osservazioni che per ora ci limitiamo ad accennare:

1°) Nel procedimento di V. Brun conviene « fare i passi di lunghezza decrescente » (¹).

2°) Detta $S^{(n)}$ la funzione simmetrica elementare di grado n dei numeri $\frac{1}{p}$ con $\alpha < p \leq \alpha^{\theta}$ $(\theta > 1)$, per il fatto che la serie $\sum_p \frac{1}{p^2}$ converge, abbiamo

$$S^{(n)} = \frac{(S^{(1)})^n}{n!} + o(1) \qquad (n \text{ e } \theta \text{ fissi, } \alpha \to +\infty)$$

e questa relazione viene da noi usata per limitare inferiormente la funzione $S^{(n)}$, in unione a quella consueta

$$S^{(n)} \leq \frac{(S^{(1)})^n}{n!}$$

che la limita superiormente.

Nella Parte II di questa Memoria esponiamo una rappresentazione del fecondo metodo di V. Brun (²) notomizzandolo e suddividendo i suoi strumenti secondo la loro natura (di analisi combinatoria, di algebra, di aritmetica); apparirà chiaramente come la sua radice si trovi in una proposizione di natura combinatoria. Questa esposizione risulta opportuna, perchè il nostro scopo è di impiccolire il valore di certe costanti a cui il metodo conduce, introducendo al momento giusto le modificazioni accennate; inoltre essa apparisce pronta per eventuali più generali applicazioni.

E noi, seguendo l'esempio di H. Rademacher, come facemmo in altro lavoro, ne abbiamo fatta applicazione allo studio aritmetico della successione dei valori interi assunti da un polinomio (a valori interi), e abbiamo ottenuto tra l'altro proposizioni che migliorano risultati noti, col precisare confini per certe costanti di cui era nota l'esistenza oppure col restringere confini preesistenti.

(¹) Per orientare sul significato di questa locuzione grossolana diremo che i « passi » sono misurati dai numeri $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ definiti al n. 1 (ved. (1.4)). Una accurata indagine sulle ragioni del successo conseguito da Th. Estermann (« Journal für Mathematik », **168** (1932), 106-116) rispetto alle ricerche precedenti sullo stesso argomento ci mostra che esso è dovuto all'accorgimento del « primo passo più lungo dei successivi ». Noi abbiamo già applicato in « Rendiconti di Palermo », **57** (1933), 433-475, tale accorgimento, e qui siamo indotti, in modo naturale, a graduare la lunghezza per alcuni passi iniziali.

(²) Ci siamo largamente serviti delle esposizioni precedenti: V. Brun, H. Rademacher, E. Landau, Th. Estermann, G. Ricci, H. Heilbronn-E. Landau-P. Scherk.

I risultati conseguiti si trovano esposti nella Parte I e discendono da alcuni teoremi generali le cui dimostrazioni sono svolte nella Parte III.

In questo riassunto ci limitiamo a citare, oltre al Teorema (A) (che ci ha fornito l'occasione di questa ricerca), i seguenti

TEOREMA (B). — *In ogni progressione aritmetica*

$$ax + b \ (x = 1, 2, 3,\ldots) \qquad ((a, b) = 1)$$

1°) *esistono infiniti interi* n *composti con al più* **due** *fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{3}}$;

2°) *esistono infiniti interi* n *composti con al più* **tre** *fattori primi, tutti* **distinti** *e tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{4}}$.

Questo teorema si accosta a quello classico di P. G. L.-DIRICHLET: il suo interesse consiste nel fatto che la sua dimostrazione richiede esclusivamente mezzi elementari e che inoltre esso rientra come caso particolare nel seguente Teorema (C). Il Teorema (B) segna un progresso sui risultati conseguiti nel tentare di dimostrare elementarmente il classico teorema della progressione aritmetica (cinque fattori primi V. BRUN (1919), tre fattori primi H. RADEMACHER (1924), quattro fattori primi distinti G. RICCI (1933)).

TEOREMA (C). — *Sia* $D \cdot F(x)$ *un polinomio in* x *di grado* g *a coefficienti interi primitivo, irriducibile, e sia* D *il suo divisore fisso* [1]. *Nella successione di interi*

$$F(1), \quad F(2), \quad F(3),\ldots$$

1°) *ne esistono infiniti* F(n) *composti con al più* $3g - 1$ *fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di* $n^{\frac{1}{3}}$;

2°) *ne esistono infiniti* F(n) *composti con al più*

$$\left[\frac{2sg-1}{s-g}\right] \qquad (g + 1 \leq s \leq 3g)$$

fattori primi (uguali o distinti), tutti maggiori di $n^{\frac{s-g}{2s}}$, *ciascun fattore primo figurando con un esponente* $< s$.

Detto $B(\xi; F(x))$ *il numero degl'interi* $n \leq \xi$ *pei quali sono soddisfatte le condizioni in* 1°), *è*

$$\alpha_1 \frac{\xi}{\log \xi} < B(\xi; F(x)) < \alpha_2 \frac{\xi}{\log \xi}, \qquad per\ \xi > \alpha_3$$

(1) Ricordiamo che D divide $g!$. Ad esempio: per $D \cdot F(x) = x^3 + x + 14$ è $D = 2$, per $D \cdot F(x) = x(x-1)\ldots(x-g+1) = g!\binom{x}{g}$ è $D = g!$, $F(x) = \binom{x}{g}$.

(α_1, α_2, α_3 *dipendenti soltanto da* F(x)); *lo stesso vale per le condizioni in* 2°).

Anche questo teorema migliora risultati precedenti: $4g-1$ fattori primi (H. RADEMACHER), $[3{,}025g]$ fattori primi e $\left[\frac{sg2{,}025}{s-g}\right]$ fattori primi (uguali o distinti) ciascuno con un esponente $< s$ (G. RICCI).

Citiamo infine anche il seguente risultato.

TEOREMA (D). — *Siano*

$$m \neq 0,\ a > 0,\ b > 0 \text{ interi}, \quad N > 0 \text{ intero pari}.$$

Denotiamo con $Z(\xi)$ *il numero degl'interi* x *soddisfacenti alle seguenti condizioni*

1°) $0 < x \leqq \xi$,

2°) x *è composto con al più* a *fattori primi (uguali o distinti) ciascuno maggiore di* $x^{\frac{1}{a+1}}$,

3°) $x + 2m$ *è composto con al più* b *fattori primi (uguali o distinti) ciascuno maggiore di* $x^{\frac{1}{b+1}}$.

Denotiamo con W(N) *il numero delle partizioni*

$$N = A + B \qquad (A,\ B \text{ interi positivi})$$

nelle quali A *è composto con al più* a *fattori primi, ciascuno maggiore di* $N^{\frac{1}{a+1}}$ *e* B *è composto con al più* b *fattori primi, ciascuno maggiore di* $N^{\frac{1}{b+1}}$.

Per

$$(a=6,\ b=6)\ (\text{TH. ESTERMANN})$$

$(a=5,\ b=7)$, $(a=4,\ b=9)$, $(a=3,\ b=15)$, $(a=2,\ b=366)$,

risulta

$$\frac{\xi}{\log^2\xi} = O(Z(\xi)), \quad Z(\xi) = O\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right) \qquad \text{per } \xi \to +\infty$$

$$\frac{N}{\log^2 N} = O(W(N)), \qquad \text{per } N \to +\infty.$$

Questa proposizione per $a = b = 1$, tolte evidentemente le condizioni supplementari, prende la forma delle due classiche congetture di GOLDBACH e dei numeri primi gemelli ($m = 1$).

La validità di una proposizione di questo tipo fu dimostrata la prima volta da V. BRUN (1919) ($a = b = 9$); successivamente si ebbe per $a = b = 7$ H. RADEMACHER (1924), per $a = b = 6$ TH. ESTERMANN (1932).