UMI

Recensioni

* E. Tornier: Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrations Theorie (B. Levi)
* A. Agostini: Lezioni di Analisi Matematica, Vol. I (Silvio Cinquini)
* Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi: Nozioni di Balistica esterna (M. Manarini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.4, p. 188–193.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_4_188_0>

RECENSIONI

E. TORNIER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrations Theorie.* Leipzig und Berlin, Teubner 1936, pp. 160+VI (geb. RM. 12, estero RM. 9).

Soltanto la seconda parte del volume che, come estensione, ne è poco più di un terzo, riguarda direttamente il calcolo delle probabilità. La prima, col titolo di *teoria generale delle funzioni d'insieme,* riguarda essenzialmente la teoria della misura e quella dell'integrazione ed ha contenuto prettamente analitico: e, per quanto l'A. voglia accentuarne il carattere di semplice preparazione necessaria agli sviluppi della seconda parte che del lavoro costituirebbe il nocciolo essenziale, ci pare che in essa l'interesse analitico abbia in realtà il sopravvento sopra quello strumentale. Si tratta anzitutto di una teoria astratta assiomatica della misura, definita questa come un riferimento fra gli aggregati parziali di un certo aggregato **B** ed i numeri reali, soddisfacente a un gruppo di quattro postulati che l'A. chiama rispettivamente della quota (*Bewertung*) univoca, dello spezzamento, di continuità e di monodromia; la quale potrebbe benissimo concretarsi (e per l'applicazione in vista sarebbe sufficiente) in una teoria della misura degli aggregati di punti del segmento $0\overline{\ }1$ (preso come aggregato **B**); ma che ha così il vantaggio di essere liberata da ogni superflua nozione dimensionale e di misura euclidea, e di porre a fondamento (analogo — si può considerare — dei segmenti a estremi razionali) un sistema $\varkappa$ di aggregati parziali di **B** molto arbitrario; ne segue una definizione di aggregati aventi *contenenza* (*Inhalt*) e aggregati aventi *misura*, analoga alla distinzione fra misurabilità nel senso di BOREL e misurabilità nel senso di LEBESGUE in cui però la definizione di misurabilità è ottenuta col ricorso a soli sistemi di aggregati fondamentali maggioranti, il che si presenta vantaggioso in parecchie dimostrazioni [1]. Su questa nozione di

[1] Un simile modo di procedere direttamente per la teoria generale dell'integrazione è stato suggerito da molto tempo dallo scrivente: (*Sulla definizione dell'integrale* « Annali di Matematica », 1922).

misura si fonda poi una teoria dell'integrazione molto analoga a quella abituale dell'integrale di LEBESGUE.

Questi fondamenti analitici debbono servire all'A. per ricercare una teoria delle probabilità che abbia il rigore della matematica e mantenga nello stesso tempo il contatto colla intuizione sperimentale; perchè, osserva l'A., non soddisfa a tali requisiti il concetto di « collettivo » introdotto da v. MISES, il quale si è mostrato contradditorio, nè quello più classico del « caso » troppo incerto e di natura psicologica. Il punto di partenza dell'A. non differisce essenzialmente dallo schema delle urne; ma, mentre con questo si postula abitualmente l'indifferenza fra i vari eventi logicamente possibili, egli aggiunge fondamentalmente elasticità alla teoria colla nozione di *campo di probabilità*. Una successione infinita di operazioni idealmente definite (estrazioni nello schema delle urne) caratterizza un aggregato **B** di successioni infinite di eventi logicamente possibili: una realizzazione particolare di successioni finite ma illimitatamente crescenti di operazioni che possono considerarsi come immagine concreta delle suddette operazioni ideali fa corrispondere, almeno per approssimazione, a taluni aggregati parziali $\mathfrak{A}$ di **B** un numero reale α (compreso fra 0 e 1) esprimente, dal punto di vista intuitivo, la probabilità che la detta successione di operazioni reali, ove potesse essere illimitatamente proseguita, darebbe luogo ad una successione di eventi appartenenti ad $\mathfrak{A}$. L'aggregato F delle coppie $(\mathfrak{A}, \alpha)$ si chiama un *campo di probabilità* quando soddisfa ad un gruppo di postulati pei quali l'A. stabilisce una rappresentazione del campo di probabilità sopra un insieme di aggregati parziali di un aggregato **B** e una definizione in questo della misura per modo che le probabilità α si identificano coi contenuti degli aggregati rispettivamente corrispondenti agli $\mathfrak{A}$. L'A. indica il legame fra gli aggregati $\mathfrak{A}$ (considerati come appartenenti al particolare insieme F) e i corrispondenti numeri α colla scrittura $(F, \mathfrak{A}) = \alpha$.

Per mostrare come la dipendenza astratta stabilita fra aggregati e probabilità si identifichi coll'ordinaria nozione che considera la probabilità come limite della frequenza, l'A. dimostra già nella prima parte dell'opera un interessante teorema, secondo il quale, assegnata una successione di aggregati U parziali di un altro aggregato **B**, si può estrarne una successione di elementi (punti) $\overline{F}$ tali che il limite della frequenza degli elementi di $\overline{F}$ in ciascun U sia uguale ad un numero, assegnato arbitrariamente per ogni U e che qui si assume uguale al rapporto fra la misura di U e quella di **B** (probabilità): ciascuna di tali successioni $\overline{F}$ è chiamata dall'A. un *modello* del campo di probabilità considerato. Un apposito postulato è necessario per assicurare il teorema delle probabilità composte e conseguentemente la formola di BAJES sulla probabilità delle cause. Definita come *variabile* (nel senso del calcolo delle probabilità) una funzione dei punti di **B** integrabile rispetto alla misura determinata dal campo di probabilità considerato, se ne definisce il valor medio e lo scarto quadratico; si considerano quindi in particolare le variabili saltuarie (*Treppenfunktionen*) e si giunge così, con dimostrazioni talvolta interessanti, a stabilire le proposizioni fondamentali della teoria classica delle probabilità, compresa la deduzione della legge di GAUSS pel caso delle infinite variabili a due soli valori. B. LEVI

A. AGOSTINI: *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I (Tip. Lit. R. Accademia Navale, Livorno, 1936-(XIV)).

È la prima parte del corso biennale di Analisi che l'Autore da parecchi anni svolge all'Accademia Navale, ed è quindi, come si legge nella breve introduzione, un'opera a scopo didattico, la quale inoltre, a differenza da quanto avviene nella maggior parte dei bienni Universitari, è dedicata esclusivamente a giovani, per i quali l'Analisi è un mezzo per affrontare lo studio delle materie tecniche.

L'opera in esame, che contiene, (salvo alcune varianti di cui diremo in seguito), la materia che per solito si svolge nel primo anno di Università, risponde perfettamente alle esigenze del pubblico al quale è dedicata, perchè l'esposizione, che pur è chiara e rigorosa, procede rapida e concisa, senza superflue considerazioni di carattere critico, mettendo bene in rilievo i punti più importanti della teoria e illustrandone i concetti fondamentali con numerosi esempi, tratti dalle applicazioni, in modo da formare, in un limitato numero di lezioni, una solida base matematica del futuro ufficiale di marina.

Le dimostrazioni sono talvolta omesse, o soltanto accennate, o fatte sotto ipotesi più restrittive di quelle che figurano nell'enunciato, ma in quest'ultimo caso l'A. ha avuto sempre l'avvertenza di mettere bene in rilievo quali sono queste limitazioni, (ciò che ha la massima importanza per la formazione della mente dell'allievo), e raggiunge lo scopo di non affidare importanti proprietà alla sola memoria, ma di provarle rapidamente, in casi particolari, con considerazioni, nelle quali alla semplicità e alla chiarezza si uniscono sempre la precisione, il rigore e anche l'eleganza.

Le ottime qualità didattiche dell'A., ben note a chi è stato suo allievo, e che rendono tanto efficace il suo insegnamento, si riflettono anche nei numerosi e semplicissimi esercizi, che nel volume accompagnano lo sviluppo della teoria, in parte risolti, onde interessare il lettore e illuminargli i concetti appresi, e in parte proposti, onde abituarlo a pensare con la propria mente.

Ma uno dei più originali pregi del volume è costituito dalle numerose applicazioni che vengono fatte sia alla geometria, sia alla meccanica, sia alle altre scienze applicate, e relativamente alle quali l'A. ha esposto alcune nozioni fondamentali in modo che, pur non perdendo di vista la realtà fisica del concetto, le esigenze dell'analista sono completamente soddisfatte.

Questi complementi conseguono un fine didattico molto importante, perchè abituano il principiante alla proprietà di linguaggio e al ragionamento rigoroso, inquantochè l'A. evita la considerazione diretta dei punti infinitamente vicini e bandisce completamente quei tipi di ragionamento, che talvolta vengono fatti per brevità e dei quali l'A. dà esempi, facendo rilevare che, per quanto conducano a risultati esatti, sono basati su considerazioni false, i cui errori, per così dire, si compensano.

Ma in tal modo l'A. adempie anche all'importantissima missione di mostrare all'esordiente, che ha per obbiettivo lo studio dei problemi della tecnica, quale importanza abbia, a questo fine, la conoscenza dell'analisi, e di convincerlo che la matematica, (di cui l'analisi è il capitolo fondamentale), è un ramo della scienza e non della filosofia!

L'Agostini, di cui è ben nota la competenza nel campo dell'indagine storica, alla quale ha notevolmente contribuito, ha corredato il volume di alcune interessanti notizie storiche.

Passando ad esaminare il contenuto dell'opera, che risente certamente dell'influenza degli illustri Maestri, che l'A. ebbe nello « Studio matematico bolognese », rileviamo che è omessa per ragioni didattiche, la teoria dei numeri reali, (che vengono studiati nei Licei ed anche nel corso estivo preparatorio, che si tiene ogni anno presso l'Accademia Navale), salvo un breve accenno alle successive estensioni del concetto di numero all'inizio del Capitolo dedicato ai numeri complessi, il quale, a motivo delle note esigenze del corso di Geometria analitica, non è il primo, ma il terzo; i due precedenti sono dedicati rispettivamente al calcolo combinatorio, (con un breve cenno al calcolo delle probabilità, pervenendo alla dimostrazione del teorema di Bernoulli), e ai determinanti e ai sistemi di equazioni algebriche lineari.

Il Cap. IV tratta degli insiemi di numeri reali e dei preliminari sulle funzioni di variabile reale e il Cap. V dei concetti di limite, infinitesimo e funzione continua. Rileviamo che il concetto di limite viene dato senz'altro per le funzioni definite in un insieme, e che la parte dedicata agli insiemi numerabili potrebbe forse sembrare, a prima vista, un po' breve; ma, avendo l'A. mimandato al secondo volume il capitolo dedicato alle serie, come risulta dalla prefazione, lo studio delle successioni verrà certamente ripreso con quello delle serie.

Terminata così la parte introduttoria, si entra con il Cap. VI nel cuore del Calcolo infinitesimale, e una delle caratteristiche più notevoli del corso in esame è costituita dal fatto che questo primo volume contiene, limitatamente alle funzioni di una sola variabile, sia il calcolo differenziale, sia l'integrale; lo studio dei quali viene iniziato contemporaneamente, ma indipendentemente. Questa ripartizione della materia ha permesso all'A. di fare, all'inizio di questo Capitolo, una brillante introduzione al Calcolo infinitesimale, esaminando numerose questioni di geometria, di meccanica e di altri rami della tecnica, le quali conducono a due soli problemi analiticamente distinti, che vengono studiati in modo del tutto generale, indipendentemente da ogni significato geometrico o fisico, i quali sono l'integrazione definita e la derivazione. Seguendo l'ordine storico, l'A. comincia ad occuparsi del primo di questi, dimostrando l'esistenza dell'integrale definito di ogni funzione continua, accennando ad altre classi di funzioni integrabili, e stabilendo le prime proprietà dell'integrazione.

Si passa quindi alla definizione della derivata, e poi, dopo alcune applicazioni di questo concetto, a quella del differenziale, senza interporre altri argomenti che talvolta fanno perdere di vista al principiante lo stretto legame che intercede fra derivata e differenziale.

Il Cap. VII è dedicato al calcolo delle derivate e all'inizio dell'VIII l'A. stabilisce le relazioni che passano fra le due parti del Calcolo, dimostrando il noto teorema di inversione, la formula fondamentale del calcolo integrale e facendo rilevare lo stretto legame che intercede fra il teorema della media e quello del valor medio, stabiliti precedentemente in modo indipendente. Altre importanti proprietà delle derivate formano oggetto della parte rimanente del Cap. VIII.

A questo punto l'A. interrompe lo studio del Calcolo infinitesimale per trattare, nel Cap. IX, delle più importanti proprietà delle equazioni algebriche, alcune delle quali sono indispensabili per l'integrazione delle funzioni razionali, e lo riprende nel Cap. X occupandosi dei metodi di integrazione, con applicazione alle più notevoli classi di funzioni integrabili, e degli integrali impropri.

Il Cap. XI contiene le applicazioni del calcolo alla geometria e alla meccanica, le ultime delle quali vengono, per solito, al più accennate nei corsi di analisi e il XII, che è l'ultimo, tratta dell'integrazione approssimata, analitica, grafica e meccanica.

Concludendo riteniamo l'eccellente opera dell'AGOSTINI utilissima non solo al pubblico, a cui è essenzialmente dedicata, ma anche a tutti quelli che si occupano specialmente di scienza applicata, ai quali oggi non bastano più i soliti manuali, ma occorre un libro come questo, chiaro, preciso e rigoroso, alla cui gradita lettura contribuisce anche la bella veste tipografica, veramente encomiabile per la prima opera matematica che esce dalla tipografia dell'Accademia Navale.

SILVIO CINQUINI

TULLIO LEVI-CIVITA e UGO AMALDI: *Nozioni di Balistica esterna*, pp. 56. Nicola Zanichelli, Bologna, 1935-XIII.

Con la recente richiesta della *Commissione suprema di difesa* il programma di Meccanica razionale dei nostri Corsi universitari è stato integrato con elementi di Balistica esterna riguardanti *il moto del proietto nell'aria, il moto relativo del proietto e dell'arma nello spazio, i moti giroscopici del proietto, l'urto del proietto contro ostacoli e le traiettorie negli alti strati dell'atmosfera.* Questo vasto programma è stato magistralmente sviluppato ed adattato dagli Autori del volumetto in esame, il quale, oltre che essere un'Appendice al loro pregevole *Compendio di Meccanica razionale*, sarà guida facile e sicura a quanti si interessano di tali argomenti pur possedendo soltanto poche nozioni di Calcolo infinitesimale e di Meccanica razionale. Cionondimeno, per chi di Calcolo ha maggiore perizia, la bella esposizione non manca di una elegante, rigorosa, esauriente discussione matematioa delle equazioni differenziali del moto del proietto nel *Problema balistico principale*, con la quale si rilevano le proprietà meccaniche qualitative delle traiettorie atmosferiche. Ma, dato il carattere elementare del libretto, queste difficoltà analitiche vengono dagli Autori brillantemente girate trattando le stesse proprietà meccaniche anche con un chiaro ragionamento ad induzione intuitiva che non ha necessità di cognizioni complementari di Analisi.

La meccanica del proietto considerato come corpo rigido, anzichè come punto pesante, i relativi problemi balistici secondari, i fenomeni giroscopici che si connettono con esso e quant'altro richiede il programma stabilito dalla Commissione suprema di difesa, è stato dagli Autori volutamente contenuto nelle nozioni fondamentali prevalentemente informative, che precisano ed inquadrano in modo perfetto i diversi fenomeni meccanici.

L'opera di FRANCESCO SIACCI, che così notevolmente ha contribuito allo studio della balistica, trova la corrispondente menzione e con essa anche i lavori di altri italiani.

M. MANARINI