BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Carlos Biggeri

Sulle singolarità delle funzioni analitiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.5, p. 209–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_5_209_0>

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1936.

PICCOLE NOTE

Sulle singolarità delle funzioni analitiche.

Nota di CARLOS BIGGERI (a Buenos Aires).

Sunto. - *Si dimostra una proposizione generalizzante il teorema di* VIVANTI-DIENES *all'ipotesi che* $\pm \frac{\pi}{2}$ *possa essere un valore limite dell'argomento dei coefficienti della serie di potenze. Si enunciano estensioni alle serie di* DIRICHLET *e agli integrali determinanti.*

Il classico teorema del DIENES (generalizzazione di quello del VIVANTI) afferma che il punto nel quale la circonferenza di convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \tag{1}$$

incontra il semiasse reale e positivo del piano z è singolare per la funzione analitica definita da questa serie, quando si compiano le due seguenti ipotesi:

1ª) parte reale di $a_n \geq 0$;

2ª) $|\operatorname{Arg} a_n| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$, (essendo τ un valore fisso).

Ci proponiamo nella presente Nota di generalizzare questo teorema, e infatti ne ottengo il seguente, il quale permette all'affisso del coefficiente a_n di muoversi lungo una curva tangente all'asse imaginario del suo piano.

TEOREMA I. — *Se vengono soddisfatte le due seguenti condizioni:*

1ª) *la parte reale del coefficiente* a_n *della serie* (1) *non è negativa;*

2ª) *il valore principale dell'argomento,* φ_n, *di* a_n *(per i valori di* n *pei quali* a_n *è positivo) soddisfa alla condizione:*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1, \tag{2}$$

allora il punto in cui la circonferenza di convergenza della serie (1)

taglia il semiasse reale e positivo del piano z ***è un punto singolare per la funzione analitica,*** f(z), ***definita da questa serie.***

DIMOSTRAZIONE. — Senza restringere la generalità, possiamo supporre che il raggio, R, di convergenza della serie (1) è uguale all'unità: dimostreremo, allora, che il punto $z=1$ è singolare per $f(z)$. La dimostrazione si fonda sul seguente lemma.

LEMMA. — Se facciamo:

$$J_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}\cdot m}$$

si ha:

a) è condizione necessaria e sufficiente, affinchè il punto $z=1$ sia singolare per $f(z)$, che si abbia:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} = 1\,;$$

b) è condizione necessaria e sufficiente, affinchè il punto $z=1$ sia regolare per $f(z)$, che si abbia:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} < 1.$$

Questo lemma può dedursi dal classico criterio di HADAMARD-FABRY-PRINGSHEIM, che dà il modo di riconoscere la singolarità di un punto che appartiene alla circonferenza di convergenza di una serie potenziale, per mezzo d'un procedimento molto laborioso, oppure può ottenersi direttamente. In un'altra Memoria diamo un criterio per riconoscere la singolarità o la regolarità di un punto, per una funzione analitica definita da un integrale determinante, quando questo punto appartiene alla retta di convergenza dell'integrale, criterio che è analogo al lemma precedente, e la dimostrazione fatta per il caso dell'integrale si può estendere ***mutatis mutandis*** alla serie.

Allora, chiamiamo ρ_n il modulo di a_n e facciamo:

$$K_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} \rho_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}\cdot m}.$$

In virtù del teorema del VIVANTI e del lemma precedente si ha:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{K_n} = 1. \tag{3}$$

Se chiamiamo $\cos\varphi_\xi$ il minore (in senso lato) dei valori di $\cos\varphi_m$, per $n \leq m \leq 2n$, avremo:

$$|J_n| \geq \cos\varphi_\xi \cdot K_n. \tag{4}$$

Dato che $\sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = \left(\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}\right)^{\frac{\xi}{n}}$ è compreso fra $\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}$ e $\left(\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}\right)^2$, in virtù della seconda ipotesi, si ha:

(5) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = 1.$$

Da (3), (4) e (5) segue

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|J_n|} \geq 1$$

e come $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|J_n|}$ non può essere maggiore di 1, si verifica necessariamente:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|J_n|} = 1.$$

Se esistesse limite ordinario di $\sqrt[n]{\rho_n}$ per $n \to \infty$, la condizione (2) può venir sostituita dalla seguente condizione più generale:

$$\overline{\lim_{\xi \to \infty}} \sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi} = 1$$

essendo φ_ξ l'argomento il cui valore assoluto è il maggiore (in senso lato) dei valori assoluti di φ_m per $n \leq m \leq 2n$.

Infatti ragionando come per il caso di una funzione analitica definita da un integrale determinante, si ha: se esiste il limite ordinario di $\sqrt[n]{\frac{1}{n}\,|f^{(n)}(\alpha)|}$, se $n \to \infty$, (per qualche α positivo e minore dell'unità), esiste anche il limite ordinario di $\sqrt[n]{|J_n|}$, quando il punto $z = 1$ è singolare per $f(z)$, onde, applicando questa conclusione e il lemma alla funzione $\frac{1}{1-z}$, si ha:

(6) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{H_n} = 1$$

facendo:

$$H_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} m^n \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot m}.$$

Se chiamiamo ρ_μ il minore (in senso lato) dei valori di ρ_m, per $n \leq m \leq 2n$, avremo:

(7) $$|J_n| \geq \cos \varphi_\xi \cdot \rho_\mu \cdot H_n.$$

Dato che $\sqrt[n]{\rho_\mu} = \left(\sqrt[\mu]{\rho_\mu}\right)^{\frac{\mu}{n}}$ è compreso fra $\sqrt[\mu]{\rho_\mu}$ e $\left(\sqrt[\mu]{\rho_\mu}\right)^2$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\rho_\mu} = 1. \tag{8}$$

D'altra parte, ragionando come poco fa, si deduce:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = 1. \tag{9}$$

Da (6), (7), (8), (9) e dal lemma si trae che il punto $z = 1$ è singolare per $f(z)$.

Se $|\varphi_n|$ tende a $\frac{\pi}{2}$, per $n \to \infty$, la condizione (2) è equivalente alla seguente:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2} - |\varphi_n|} = 1. \tag{2''}$$

È chiaro che se $|\varphi_n|$ ha un limite diverso da $\frac{\pi}{2}$, la condizione (2) è anche equivalente alla (2″), ma così il nostro teorema non darebbe nulla di nuovo: le condizioni del teorema del DIENES sarebbero soddisfatte.

In un'altra Nota dimostreremo che questo teorema si può generalizzare alle funzioni analitiche definite da serie generali di DIRICHLET, e cioè:

TEOREMA II. — *Se vengono soddisfatte le due seguenti condizioni:*

1°) *la parte reale del coefficiente* a_n *della serie di Dirichlet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} \tag{10}$$

non è negativa;

2°) *il valore principale dell'argomento,* φ_n, *di* a_n *(per i valori di* n *pei quali la detta parte reale è positiva), soddisfa alla condizione:*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1; \tag{11}$$

allora, il punto nel quale la retta di convergenza della serie (10) *incontra l'asse reale del piano* z *è singolare per la funzione analitica definita da questa serie.*

Questo teorema generalizza quello del FEKETE (che esige $|\varphi_n| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$, essendo τ un valore fisso: condizione molto più ristretta della (11)).

mente. ad es. considerando che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una successione* $a_1, a_2 \dots$ *sia* $\overline{\lim} |\sqrt[n]{a_n}| \leq 1$ *è che, fissato arbitrariamente un intero* $k > 1$, *se si considerano i segmenti in cui la successione è divisa dagli elementi* $a_1, a_k, a_{k^2}, \dots$ *ed in ciascuno di essi si sceglie un elemento* a_ξ *di modulo massimo rispetto al segmento medesimo, sia* $\overline{\lim} |\sqrt[\xi]{a_\xi}| \leq 1$: *e si verificano insieme i segni* $=$. È cioè evidentemente

$$\overline{\lim} |\sqrt[\xi]{a_\xi}| \leq \overline{\lim} |\sqrt[n]{a_n}| :$$

ma, preso arbitrariamente un a_n e considerando insieme l'a_ξ che con esso appartiene allo stesso segmento della successione, si ha

$$|a_n| \leq |a_\xi| ; \qquad \xi : k < n < \xi k$$

onde

$$|\sqrt[n]{a_n}| < |\sqrt[\xi]{a_\xi}|^k \quad \text{se} \quad |a_\xi| \geq 1,$$

$$|\sqrt[n]{a_n}| < |\sqrt[\xi]{a_\xi}|^{\frac{1}{k}} \quad \text{se} \quad |a_\xi| < 1 ;$$

quindi

$$\overline{\lim} |\sqrt[n]{a_n}| \leq \max \left\{ \left(\overline{\lim} |\sqrt[\xi]{a_\xi}| \right)^k , \left(\overline{\lim} |\sqrt[\xi]{a_\xi}| \right)^{\frac{1}{k}} \right\} :$$

se

$$\overline{\lim} |\sqrt[\xi]{a_\xi}| \leq 1,$$

è quindi pure

$$\overline{\lim} |\sqrt[n]{a_n}| \leq 1.$$

e precisamente vale nella seconda relazione il segno $=$ soltanto se ciò avviene nella prima.

Ne segue che, fissato k arbitrariamente grande, basta portare l'attenzione sui valori di $\cos \varphi_\nu$ corrispondenti ai coefficienti a_ν appartenenti alle somme A_n ovvero alle

$$A_n^* = \sum_{m=n}^{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{m}{m-n} |a_m| \eta^{n-m}$$

oppure alle

$$J_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} a_m m^n e^{-\frac{2}{3}m}$$

oppure alle

$$K_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} |a_m| m^n e^{-\frac{2}{3}m}$$

di massimo modulo rispetto ai valori di n nei singoli intervalli $k^\sigma - k^{\sigma+1}$.

per la funzione $\dfrac{1}{1+z}$. (Si tenga in conto che al punto in cui la retta di convergenza di un integrale determinante incontra *l'asse reale* del piano z, corrisponde, nelle serie di potenze, il punto in cui la circonferenza di convergenza taglia il *semiasse reale e positivo*: la trasformazione corrispondente è $z' = e^{-z}$).

In altre prossime Note generalizzeremo per le serie e per gli integrali alcuni teoremi classici della teoria delle singolarità delle funzioni analitiche definite da serie di potenze.