Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Beppo Levi

Osservazioni riguardo alla precedente nota di C. Biggeri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.5, p. 214–215.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_5_214_0>

Osservazioni riguardo alla precedente Nota di C. Biggeri

di Beppo Levi (a Bologna).

Sunto. - *Qualche considerazione sulle generalizzazioni del teorema di* VIVANTI-DIENES *e la relativa bibliografia.*

È dovere rilevare che il caso del teorema dimostrato da C. BIGGERI relativo all'ipotesi che esista $\lim |\sqrt[n]{a_n}|$ per $n \to \infty$ rientra come caso particolare in una proposizione forse poco nota [1] enunciata dal sig. MILOS KÖSSLER (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXXII, 1° sem. 1923, p. 85), senza però svolgerne la dimostrazione nei suoi particolari: la linea di ragionamento indicata nel l. c. è anche diversa da quella seguita dal BIGGERI.

È pure da notare che un lemma preliminare del KÖSSLER (l. c. p. 27) consente di sostituire nel ragionamento del BIGGERI, con qualche vantaggio di semplicità, l'espressione J_n coll'altra

$$A_n = \sum_{m=n}^{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{m}{n-m} a_m \eta^{n-m}$$

dove η è un numero arbitrario dell'intervallo $0 < \eta \leq 3/4$.

Infine si può osservare che generalizzazioni delle proposizioni del BIGGERI a carattere lacunare possono ottenersi facil-

[1] Di fatto il MANDELBROJT nel Mémorial « *Les singularités des Fonctions Analytiques représentées par une série de Taylor* » (1932) ricorda bensì il KÖSSLER ed anche la Nota lincea cui qui ci riferiamo, a proposito della generalizzazione del teorema di PRINGSHEIM, VIVANTI, DIENES, ma ciò a proposito di considerazioni d'ordine lacunare e non della estensione di cui qui si tratta. Può anche essere notato che la proposizione è pure contenuta in germe, sebbene non enunciata, in classiche considerazioni dell'HADAMARD (*La série de Taylor*, « Coll. Scientia », Cap. III, 6).

mente. ad es. considerando che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una successione* $a_1, a_2 \dots$ *sia* $\overline{\lim}\,|\sqrt[n]{a_n}| \leq 1$ *è che, fissato arbitrariamente un intero* $k > 1$, *se si considerano i segmenti in cui la successione è divisa dagli elementi* $a_1, a_k, a_{k^2}, \dots$ *ed in ciascuno di essi si sceglie un elemento* a_ξ *di modulo massimo rispetto al segmento medesimo, sia* $\overline{\lim}\,|\sqrt[\xi]{a_\xi}| \leq 1$: *e si verificano insieme i segni* $=$. È cioè evidentemente

$$\overline{\lim}\,|\sqrt[\xi]{a_\xi} \leq \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n}|:$$

ma, preso arbitrariamente un a_n e considerando insieme l'a_ξ che con esso appartiene allo stesso segmento della successione, si ha

$$|a_n| \leq |a_\xi|; \qquad \xi : k < n < \xi k$$

onde

$$|\sqrt[n]{a_n}| < |\sqrt[\xi]{a_\xi}|^k \qquad \text{se} \qquad |a_\xi| \geq 1,$$

$$|\sqrt[n]{a_n}| < |\sqrt[\xi]{a_\xi}|^{\frac{1}{k}} \qquad \text{se} \qquad |a_\xi| < 1:$$

quindi

$$\overline{\lim}\,|\sqrt[n]{a_n} \leq \max\left\{\left(\overline{\lim}\,\sqrt[\xi]{a_\xi}|\right)^k,\ \left(\overline{\lim}\,|\sqrt[\xi]{a_\xi}|\right)^{\frac{1}{k}}\right\}:$$

se

$$\overline{\lim}\,|\sqrt[\xi]{a_\xi}| \leq 1,$$

è quindi pure

$$\overline{\lim}\,|\sqrt[n]{a_n}| \leq 1.$$

e precisamente vale nella seconda relazione il segno $=$ soltanto se ciò avviene nella prima.

Ne segue che, fissato k arbitrariamente grande, basta portare l'attenzione sui valori di $\cos\varphi_\nu$ corrispondenti ai coefficienti a_ν appartenenti alle somme A_n ovvero alle

$$A_n^* = \sum_{m=n}^{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{m}{m-n} |a_m|\, \eta^{n-m}$$

oppure alle

$$J_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} a_m m^n e^{-\frac{2}{3}m}$$

oppure alle

$$K_n = \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \sum_{m=n}^{m=2n} |a_m|\, m^n e^{-\frac{2}{3}m}$$

di massimo modulo rispetto ai valori di n nei singoli intervalli $k^\sigma - k^{\sigma+1}$.