Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Gino Arrighi

Sull'esistenza di un integrale, quadratico nella velocità, nel problema del moto di un punto nello spazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.5, p. 216–219.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_5_216_0>

Sull'esistenza di un integrale, quadratico nella velocità, nel problema del moto di un punto nello spazio.

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca).

Sunto. - *In questa Nota si discute la forma di un integrale, quadratico nella velocità, nel problema del moto di un punto in uno spazio tridimensionale.*

1. Il classico problema degli integrali primi comuni a più problemi di Meccanica cui il BERTRAND ha dedicate due Memorie fondamentali (1), è stato di poi ripreso da vari Autori fra i quali. principali, CERRUTI (2), VIVANTI (3), MARCOLONGO (4), DE CRISTOFARO (5), ODONE (6) e CASTELFRANCHI (7). In questa Nota mi propongo di fare, ciò che non mi resulta ancor fatto, una trattazione sistematica dell'integrale intero. quadratico rispetto alle componenti della velocità, relativo al moto di un punto nello spazio tridimensionale.

(1) J. BERTRAND. *Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique*, in « Journal de mathématiques (par Liouville) », t. XVII, a. 1852, p. 121; *Sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel*, in « Journal de mathématiques (par Liouville) », s. II, t. II, a. 1857, p. 113.

(2) V. CERRUTI, *Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di Meccanica*, in « Collectanea mathematica in honorem D. Chelini », Milano, 1881, p. 171.

(3) G. VIVANTI, *Sugli integrali delle equazioni del moto di un punto che sono funzioni lineari fratte delle velocità componenti*, in « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. 6, a. 1891, p. 121.

(4) R. MARCOLONGO, *Sui problemi di Meccanica con due gradi di libertà. che ammettono un integrale quadratico rispetto alle componenti della velocità*, in « Rendiconti R. Accademia di Napoli », s. 3a, v. 21, a. 1915, p. 79.

(5) E. DE CRISTOFARO, *Problemi dinamici a due variabili che ammettono un integrale razionale lineare e fratto rispetto alla velocità*, in « Atti della R. Accademia dei Lincei », v. XXVII, s. 1a, 1° sem..

(6) F. ODONE, *Sopra un problema di Meccanica studiato da Bertrand*, in « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », v. LXVI, a. 1931, p. 170.

(7) L. CASTELFRANCHI, *Problemi di moto che ammettono integrali primi lineari, interi o fratti, rispetto alle componenti della velocità*, in « Giornale di matematiche di Battaglini ». v. LVXII. a. 1934, p. 1.

Supposta unitaria la massa del punto mobile P e detto $\mathbf{F}$ il vettore, funzione soltanto di P, della forza agente sul mobile. l'equazione del moto si scriverà

$$P'' = \mathbf{F}(P), \tag{1}$$

e l'integrale primo, in istudio, avrà la forma

$$P' \times \sigma P' + \mathbf{u} \times P' + m = \text{costante}, \tag{2}$$

dove σ (dilatazione), $\mathbf{u}$ (vettore) e m (numero reale) sono funzioni soltanto di P.

In virtù della (1), l'esistenza dell'integrale (2) importa le condizioni [8]

$$d\sigma dP \times dP = 0, \tag{3}$$

$$d\mathbf{u} \times dP = 0, \tag{4}$$

$$2\sigma\mathbf{F} + \operatorname{grad} m = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{F} = 0. \tag{6}$$

Alla condizione (4) si soddisfa assumendo

$$d\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge dP,$$

che, per essere un differenziale esatto, dovrà ridursi alla forma [9]

$$d\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \wedge dP, \tag{7}$$

dove $\mathbf{v}_0$ è un vettore costante arbitrario. Integrando la (7) resulta

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \wedge (P - O) + \mathbf{u}_0, \tag{8}$$

dove O è un punto fisso e $\mathbf{u}_0$ un vettore costante, entrambi arbitrarî. La (6), per le (1), (8) può scriversi pure

$$P'' \times \mathbf{v}_0 \wedge (P - O) + P'' \times \mathbf{u}_0 = 0,$$

onde, integrando, resulterà

$$P' \times \mathbf{v}_0 \wedge (P - O) + P' \times \mathbf{u}_0 = \text{costante},$$

ovvero

$$P' \times \mathbf{u} = \text{costante},$$

e l'integrale (2) dovrà scriversi, sempre, più semplicemente

$$P' \times \sigma P' + m = \text{costante}, \tag{9}$$

[8] Naturalmente le condizioni in parola coincidono con quelle relative al problema piano, soltanto che se ne differenziano per le soluzioni; vedi nota citata in [6].

[9] C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Trasformazioni lineari*, Bologna, Zanichelli, 1929, p. 246.

ciò che resulta ancora nel caso di un moto piano [10]. La (6) scritta nella forma

$$\mathbf{F} \times [\mathbf{v}_0 \wedge (P - O) + \mathbf{u}_0] = 0,$$

ci dice che le linee d'azione della forza appartengono ad un complesso lineare, come nel caso dell'esistenza di un integrale lineare intero [11].

Circa la condizione (5), affinchè esista un numero m che la verifica, dovrà aversi [12]

$$\text{rot}\,(\sigma\mathbf{F}) = 0. \tag{10}$$

Si passi adesso all'analisi della condizione (3); ad essa si avrà soddisfatto assumendo

$$d\sigma = \mathbf{w} \wedge + \alpha \cdot dP \wedge, \qquad [\alpha = \alpha(P)] \tag{11}$$

dove $\mathbf{w}$, dovendo essere funzione di P e funzione lineare di dP, avrà la forma [13]

$$\mathbf{w} = \beta dP, \tag{12}$$

con $\beta = \beta(P)$. Ma $d\sigma$, come σ, deve essere dilatazione, perciò per (11), (12) dovrà prendersi

$$\beta dP = - V(\alpha \cdot dP \wedge),$$

cosicchè sarà

$$d\sigma = D(\alpha \cdot dP \wedge). \tag{13}$$

ciò cui si riduce in definitiva la condizione (3).

L'espressione ora data per $d\sigma$, per essere un differenziale esatto, è necessario e basta che lo sia

$$dP \wedge K\alpha, \tag{14}$$

giacchè i simboli D, K sono permutabili con il simbolo di differenziazione. Ora, detto $\mathbf{a}$ un vettore arbitrario costante, la (14) e la

$$dP \wedge K\alpha\mathbf{a}$$

sono entrambe, o nessuna, differenziali esatti; ma la condizione per quest'ultima è che, analogamente alla (7), sia

$$K\alpha\mathbf{a} = \text{vettore costante},$$

la quale, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, ci dà finalmente

$$\alpha = \alpha_0 = \text{omografia costante arbitraria.}$$

(10) V. nota citata in (6).

(11) V. nota citata in (2), oppure nota citata in (7) ove trovasi pure la trattazione vettoriale dello stesso argomento.

(12) Opera citata in (9), pp. 263-264.

(13) Opera citata in (9), p. 28.

Tenendo presente questo resultato, quando si passi ad integrare la (13) si ottiene

$$\sigma = D[\alpha_0 \cdot (P - O_1) \setminus] + \sigma_0$$

dove O_1 è un punto fisso arbitrario e σ_0 dilatazione arbitraria costante.

2. La forma (9) cui si riduce sempre, come si è visto, l'integrale (2) viene così precisata mediante la espressione ora trovata per σ.

Si osservi che quando α_0 e σ_0 sono omotetie vettoriali (costanti), per cui lo è pure σ, la (10) ci dà

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U,$$

cioè ci assicura l'esistenza di un potenziale delle forze e la (9) si riduce al noto integrale delle forze vive.

Prima di chiudere è da osservarsi ancora che la (5), in virtù della espressione di σ precedentemente trovata, può scriversi nella forma

$$I_1 \alpha_0 \cdot (P - O_1) \wedge \mathbf{F} - K\alpha_0 (P - O_1) \wedge \mathbf{F} + 2(P - O_1) \wedge K\alpha_0 \mathbf{F} +$$
$$+ 2\sigma_0 \mathbf{F} = - \operatorname{grad} m.$$