Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Castoldi

Estensione ai "Vettori generalizzati" di una formula dell'ordinaria analisi vettoriale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **15** (1936), n.5, p. 219–221.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1936_1_15_5_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1936.

Estensione ai "Vettori generalizzati" (1) di una formula dell'ordinaria analisi vettoriale.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Pavia).

Sunto. - *Si dimostra che per i vettori generalizzati vale una relazione analoga a quella nota dal Calcolo vettoriale elementare:*

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v};$$

e se ne fa applicazione alle equazioni di MAXWELL *dell'Elettromagnetismo nella loro forma relativistica.*

1. Sia $T_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ un vettore generalizzato di ordine m in una varietà metrica V_n delle variabili $x^1, x^2, \ldots, x^n$; e supponiamo $m < n$.

Calcoliamo il vettore generalizzato rot rot $\mathbf{T}$. Si ha per definizione:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{T} = \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{T}} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_{n-m-1} h r_1 \ldots r_m} \cdot T_{r_1 \ldots r_m / h}.$$

(1) Il concetto di « Vettore generalizzato » è stato introdotto dal prof. A. PALATINI in un suo lavoro pubblicato nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova », anno IV, nn. 3-4, 1933. Rinviamo a questo lavoro per tutte le proprietà e per le notazioni relative ai vettori generalizzati.

Di qui, passando al supplementare, otteniamo:

$$\overline{\mathrm{rot}}\,\mathbf{T} = \frac{1}{m!(n-m-1)!}\varepsilon_{j_1\dots j_m j_{m+1}}{}^{i_1\dots i_{n-m-1}} \cdot \varepsilon^{i_1\dots i_{n-m-1} h r_1 \dots r_m} \cdot T_{r_1\dots r_m/h} =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-m-1)(m+1)}}{m!}\,\delta^{hr_1\dots r_m}_{j_1\dots j_m j_{m+1}} \cdot T_{r_1\dots r_m/h} =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-m)(m+1)-1}}{m!}\,\delta^{r_1\dots r_m h}_{j_1\dots j_m j_{m+1}} \cdot T_{r_1\dots r_m/h}.$$

Infine:

(2) $$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{T} = \frac{(-1)^{(n-m)(m+1)-1}}{m!}\,\delta^{r_1\dots r_m h}_{j_1\dots j_m k} \cdot T_{r_1\dots r_m/h}{}^{/k};$$

o anche, ricordando la definizione di « gradiente » di un vettore generalizzato ([2]):

(3) $$\boxed{\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{T} = (-1)^{(n-m)(m+1)-1}\,\mathrm{div\,grad}\,\mathbf{T}},$$

formula che generalizza, semplificandola per di più, l'ordinaria citata relazione vettoriale.

Ma è possibile dare alla (2) anche una forma perfettamente analoga alla consueta, nel seguente modo: Consideriamo la sommatoria che compare nel secondo membro di (2). Fissati gli indici $j_1 \dots j_m$ che forniscono una componente di rot rot **T**, portiamo l'attenzione sugli indici $r_1 \dots r_m$. In ogni termine che non sia nullo, o questi assumeranno, a meno dell'ordine, i valori $j_1 \dots j_m$, oppure tra essi uno, che potremo sempre portare all'ultimo posto, assumerà il medesimo valore di k.

Separando i termini che provengono dalle due alternative, si ottiene:

(2') $$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{T} = (-1)^{(n-m)(m+1)-1}\left[T_{j_1\dots j_m/k}{}^{/k} - \frac{m}{m!}\,\delta^{r_1\dots r_{m-1} h}_{j_1\dots j_{m-1} j_m} \cdot T_{r_1\dots r_{m-1} k/h}{}^{/k}\right].$$

Indicando con $\Delta\mathbf{T}$ la divergenza del tensore derivato di **T**, e ancora ricorrendo alla citata definizione di gradiente, la (2') può scriversi più succintamente:

(4) $$\boxed{\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{T} = (-1)^{(n-m)(m+1)}[\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{T} - \Delta\mathbf{T}]}.$$

La (4) è la formula che volevamo stabilire. Rileviamo che rot rot **T** è, come **T**, un vettore generalizzato di ordine m.

([2]) Vedi A. Palatini, lavoro citato, n. 8, dove il fattore numerico $\frac{1}{m!}$ da noi introdotto è conglobato nelle componenti tensoriali.

Nel caso che $\mathbf{T}$ sia un vettore ordinario ($m=1$) nella V_n, la (2') si riduce a

$$\text{rot rot } \mathbf{T} = T_{k/j}^{/k} - T_{j/k}^{/k}, \tag{2''}$$

mentre la (4) assume l'aspetto ben noto:

$$\text{rot rot } \mathbf{T} = \text{grad div } \mathbf{T} - \Delta\mathbf{T}. \tag{4'}$$

La (4') estende al caso di varietà qualunque la formula del calcolo vettoriale rot rot $\mathbf{u}$ = grad div $\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}$: la (4) estende ulteriormente questa relazione al caso di vettori generalizzati.

2. Riferiamoci in particolare alla V_4 delle coordinate di spazio e di tempo che nella Relatività rappresenta lo spazio fisico: e in essa consideriamo un vettore ordinario φ ($m=1$) che soddisfi alla «condizione di continuità»

$$\text{div } \varphi \equiv \varphi^i{}_{/i} = 0. \tag{5}$$

Applicando la (4') avremo:

$$\text{rot rot } \varphi = -\Delta\varphi. \tag{6}$$

Chiamiamo $\mathbf{I}$ il vettore ordinario che compare nei due membri di (6):

$$-\Delta\varphi = \mathbf{I}. \tag{7}$$

e $\mathbf{F}$ il vettore generalizzato di second'ordine definito da:

$$\mathbf{F} = \text{rot } \varphi\,; \quad \text{ossia} \quad F^{ik} = \varepsilon^{ikrs}\varphi_{s/r}. \tag{8}$$

La (6) si può scrivere allora:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \text{oppure} \quad \boxed{\text{div } \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{I}}, \tag{9}$$

mentre per essere $\mathbf{F}$ un rotore [3]:

$$\text{div } \mathbf{F} = 0, \quad \text{oppure} \quad \boxed{\text{rot } \overline{\mathbf{F}} = 0}. \tag{10}$$

Se identifichiamo il vettore φ col vettore potenziale elettromagnetico relativistico, il vettore $\mathbf{I}$ colla densità di corrente, $\overline{\mathbf{F}}$ col tensore di campo elettromagnetico, le relazioni (9), (10) sono le equazioni di Maxwell [4] dell'Elettromagnetismo nella loro forma relativistica.

Le precedenti deduzioni mostrano che, con le definizioni (7) e (8) di $\mathbf{I}$ e $\mathbf{F}$, le equazioni di Maxwell conseguono dalla sola ipotesi (5).

(3) Vedi A. Palatini, lavoro citato.

(4) Vedi J. Becquerel, *Le Principe de Relativité*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, p. 250, form. (17.15); oppure A. Eddington, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*, Berlin, Springer, 1925, p. 255, form. (73.71) e (73.72).