RECENSIONI

S. Kaczmarz e H. Steinhaus: *Theorie der Orthogonalreihen*. T. VI delle « Monografie matematiche » del Seminario Matematico dell'Università di Varsavia. Warszawa, Lwow. 1935; pp. 298+VI, 5 Doll..

È questa un'ottima e interessante esposizione dello stato attuale della teoria generale delle successioni ortogonali di funzioni. Dopo un capitolo introduttorio dove sono richiamate alcune fondamentali nozioni (di cui in seguito si farà uso) sugli spazi funzionali, con particolare riguardo alla integrazione, si definisce, nel Cap. II, la relazione di ortogonalità e si introducono i concetti di densità, chiusura, completezza, normalità di un sistema infinito di funzioni ortogonali rispetto ad un assegnato spazio funzionale, si danno i primi esempi di tali sistemi e le nozioni relative allo sviluppo di una funzione secondo un dato sistema di funzioni ortogonali. Nel Cap. III lo spazio funzionale è fissato in quello classico delle funzioni integrabili a quadrato integrabile: si tratta il problema della ortogonalizzazione di un sistema assegnato di funzioni, quello dell'ampliamento di un sistema ortogonale assegnato, dell'equivalenza fra completezza e chiusura: in particolare si esamina il sistema delle potenze intere e positive della variabile dimostrando un interessante teorema di Müntz sulla sovrabbondanza di questo sistema: il capitolo si chiude coi teoremi di Parseval e di Riesz-Fischer. Il Cap. IV tratta dei più importanti e classici sistemi di funzioni ortogonali. Il Cap. V si rivolge ai problemi di convergenza e di sommazione delle serie di funzioni ortogonali. Il Cap. VI si riattacca invece agli argomenti del Cap. III considerando spazi funzionali più generali, in particolare quelli delle funzioni integrabili insieme colla p-ma potenza del loro modulo (con $p \neq 2$): si hanno allora interessanti relazioni di reciprocità fra gli spazi funzionali complementari caratterizzati dai valori p e p' di p tali che $1/p + 1/p' = 1$. La nozione di ortogonalità si generalizza nel capitolo seguente nella considerazione di una coppia di successioni, l'una di funzioni x_i e l'altra di operatori lineari U_j legati dalle relazioni $U_\alpha(x_\beta)=0$ per $\alpha \neq \beta$ ed $=1$ per $\alpha=\beta$, coppie di successioni che gli AA. chiamano biortogonali. Lo studio si restringe però tosto al caso degli operatori U_j della forma $U_j(f)=\int y_j(t)f(t)dt$ onde la relazione di biortogonalità si traduce in una dipendenza simmetrica fra le sue successioni di funzioni $x_i(t)$ e $y_j(t)$ appartenenti a spazi funzionali complementari: caso particolare importante, quello della ortogonalità relativa ad una funzione fondamentale $\omega(t)$ e dei sistemi di polinomi a ortogonalità relativa.

Il volume è notevole anche per l'ampia bibliografia e l'accurata forma tipografica. B. LEVI

E. GOURSAT: *Leçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent*: I. *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*. — D. MENCHOFF: *Les conditions de monogénéité*. Actualités scientifiques et industrielles. Paris, Hermann 1936 (risp. pag. 92, frs. 20 e pag. 52, frs. 15).

Considerando la forma delle ricerche analitiche classiche — quelle il cui tempo può chiudersi a poco meno di un secolo addietro — e delle moderne colpisce facilmente una differenza essenziale nel modo e nell'occasione in cui i problemi si pongono. Pare dominare in quelle un bisogno del concreto, un senso del particolare, anche quando il concreto ed il particolare sono puro giuoco della fantasia matematica e non hanno più nessun appoggio nella filosofia naturale che un altro secolo innanzi era stata il maggiore stimolo ai progressi dell'analisi: concreto e particolare divengono così, si potrebbe dire, il pretesto sul quale si sono svolte le ricerche d'indole critica divenute poi forma e sostanza dell'analisi moderna.

Il GOURSAT ci riporta in certo modo a quel gusto antico in un corso di Lezioni sopra le serie ipergeometriche che pare aver come programma di porre in evidenza il fermento di idee generali che si sono svolte intorno ad un argomento particolare e di interesse limitato. Di tale corso l'editore Hermann ha iniziato la pubblicazione a puntate in volumetti della nota collezione delle « Actualités scientifiques et industrielles », il primo dei quali abbiamo qui in esame. Esso contiene cinque capitoli intorno alla equazione differenziale del 2° ordine cui soddisfa la classica serie ipergeometrica di GAUSS: a questa infatti si rivolge qui particolarmente lo studio, pur dopo aver definito generalmente come *ipergeometrica* ogni serie di potenze in cui il rapporto di due coefficienti consecutivi $a_{n+1} : a_n$ si esprime come rapporto di due determinati polinomi di ugual grado in n. Il primo capitolo fa conoscere, applicandole a tale equazione, le proposizioni fondamentali del FUCHS relative al comportamento delle soluzioni di una equazione lineare nell'intorno dei punti singolari dei coefficienti; e l'autore osserva (p. 24) che « è da notare che tutte le idee essenziali della teoria del FUCHS si trovano già nella breve memoria di RIEMANN ». Caratterizzando, al modo di RIEMANN, la serie ipergeometrica come funzione analitica ovunque regolare con tre punti critici e la corrispondente equazione mediante i tre poli 0, 1, ∞ dei coefficienti e studiandone le trasformazioni collineari, egli arriva alle 24 rappresentazioni di KUMMER delle soluzioni fondamentali dell'equazione.

All'indirizzo funzionale di RIEMANN si ispira ancora nel capitolo 2° la dimostrazione della rappresentabilità delle soluzioni dell'equazione differenziale mediante gli integrali di EULERO e di JACOBI $\left(\int V(x, u)du\right.$ per $V(x, u) = u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha}$ e fra i limiti $\left.0, 1, \infty, \frac{1}{x}\right)$. Il cap. III è destinato allo studio dei casi di degenerazione dell'equazione. Nel cap. IV lo studio del gruppo secondo cui si permutano le soluzioni dell'equazione lungo cammini intorno ai punti singolari dà occasione ad introdurre in generale la classificazione in famiglie delle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque a coefficienti razionali e permette di dedurre da questa alcune delle relazioni di GAUSS fra le serie ipergeometriche di differenti parametri. Infine il capitolo V fornisce, ancora mediante considerazioni funzionali sopra gl'integrali di EULERO e di JACOBI, le dipendenze lineari fra le rappresentazioni di KUMMER che permettono di seguire lungo un cammino la determinazione di un integrale particolare.

***

La monogeneità di una funzione di variabile complessa è carattere locale e la sua traduzione nelle equazioni di CAUCHY-RIEMANN, come si sa, non completamente univoca: il completarla postulando in blocco la differenziabilità bidimensionale nel senso di STOLZ è invece eccessivo e più ancora quando la postulazione si fa per condizioni più esplicite ma soltanto sufficienti per tale differenziabilità: la critica moderna ha dovuto quindi porsi il problema della riduzione al minimo contenuto delle condizioni necessarie perchè una funzione possa affermarsi olomorfa in un determinato campo. Il risultato classico più importante è il teorema di GOURSAT che nel 1905 il POMPEIU ha esteso mostrando che perchè si possa concludere all'olomorfismo di una funzione si può rinunciare alla verifica della monogeneità in un aggregato numerabile di punti. Il MENCHOFF, che a queste ricerche ha dato negli ultimi anni interessanti contributi personali, raccoglie nell'opuscolo che abbiamo in esame i principali risultati che a quelle proposizioni sono stati aggiunti nell'ultimo trentennio: questi riguardano principalmente la sostituzione di un dominio generico alle aree piane in cui precedentemente si considerava la funzione, l'ammissione di condizioni da verificarsi quasi-ovunque, le riduzioni che all'ipotesi di monogeneità possono portarsi a causa dell'ipotesi di differenziabilità nel senso di STOLZ. L'esposizione può apparire talvolta un po' frammentaria a causa della enunciazione categorica delle singole proposizioni, la quale contribuisce però efficacemente al compito informativo, ed il lettore vi trova tutti gli elementi per una veduta unitaria dei risultati ottenuti, in poche idee fondamentali e spesso conformi ai suggerimenti dell'intuizione. Accresce il pregio del volumetto la completa bibliografia che ne occupa le ultime due pagine. B. LEVI

MAX DEURING: *Algebren.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 4, Heft 1. Berlin. Springer. 1935, p. 143+V.

La teoria generale dei numeri complessi, o ipercomplessi, o secondo la denominazione invalsa (non senza qualche confusione fra enti e algoritmo) delle *algebre*, è stata oggetto di studio nei tempi recenti per parte di molti ricercatori, principalmente americani e tedeschi: fra i primi si può dire invero abbia avuto la sua culla e fra i secondi il terreno era ampiamente preparato dallo sviluppo assunto dall'algebra formale: ma contributi notevoli in questo stesso periodo ha dato la scuola italiana che fa capo principalmente allo SCORZA. La monografia del DEURING offre un aggiornamento dei risultati ottenuti nel primo indirizzo, trascurendo invece quasi completamente quello nostrano, del quale, nell'ampia bibliografia che compie il volumetto, non è ricordato che il solo trattato dello SCORZA e una memoria del CECIONI: ma, a parte questa osservazione, esso dà, in uno spazio limitato, un buon orientamento in un argomento non facile, il quale dirama in molte direzioni. Dopo aver stabilito nel cap. I le nozioni fondamentali, si passa nel secondo ai teoremi di struttura: il cap. III tratta delle rappresentazioni delle algebre mediante matrici, per le quali però il richiamo a più ampi sviluppi contenuti nella bibliografia appare necessario. Il cap. IV studia più particolarmente la struttura delle algebre semplici e l'effetto dell'ampliamento del corpo fondamentale dell'algebra; il cap. V un tipo di algebre incontrate dapprima dal CECIONI e poi studiate con maggior generalità da NOETHER, BRAUER ed altri; infine i due ultimi capitoli, che per vastità formano la metà del libro, informano sulle ricerche dirette ad estendere alle algebre le teorie aritmetiche e quelle sui numeri algebrici.

B. LEVI

W. KRULL: *Idealtheorie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 4, Heft 3. Berlin, Springer, 1935, p. 152 + VII. RM. 17,50.

Com'è noto la nozione di « ideale » è apparsa nelle teorie algebriche dapprima colla felice estensione della teoria della divisibilità ai corpi algebrici per opera di KUMMER e DEDEKIND, poi nello studio dei moduli di polinomi e delle varietà algebriche. La duplice origine e le differenze anche notevoli dei due ordini di idee giustificano la ricerca per così dire assiomatica delle nozioni che stanno a base della teoria degli ideali. Il KRULL che durante quasi 15 anni ha portato notevoli contributi alle teorie algebriche e particolarmente al presente argomento, raccoglie in questo volumetto in modo suggestivo i fondamenti e i più notevoli risultati di una *teoria astratta degli ideali* in anelli commutativi (campi d'integrità estesi coll'ammissione di divisori dello zero). I due primi §§ (*Fondamenti e preliminari* e *Teoria astratta additiva degli ideali*) pongono le idee generali e i teoremi fondamentali; segue il § 3 (*Anelli di polinomi*) in cui si svolge una teoria delle funzioni razionali intere con coefficienti appartenenti ad un corpo numerico generale: quindi il § 4 (*Dominii semplici* (*einartige*)) allarga la nozione di corpo in quella di *anello primario* (e cioè avente un solo ideale primo formato dai divisori dello zero): nel § 5 (*Teoria delle quote* (*Bewertungstheorie*)) si studia l'ordinamento degli elementi di un anello mediante quote e la possibilità che ne risulta di istituirvi una teoria della divisibilità; infine nel § 6 (*v-ideali e a-ideali*; *comportamento degli ideali primi per ampliamenti dell'anello*) si mostra il partito che si può trarre nel riferire gli ideali di un anello a classi limitate di essi.

L'esposizione è ricca di riferimenti bibliografici distribuiti lungo il testo in corrispondenza dei singoli argomenti e di una ampia bibliografia in fine del volume.

B. LEVI

G. JULIA: *Éléments de géométrie infinitésimale*, 2e édition. (Paris, Gauthier-Villars, 1936, pagg. VII-262).

Questa seconda edizione del corso di « applicazioni geometriche dell'Analisi » professato dall'A. a Parigi segue di nove anni la prima edizione, di cui già s'è parlato in questo « Bollettino » (1). Non occorrerà dunque aggiungere molto a quanto allora fu detto. L'A. non tratta che alcuni elementi della geometria differenziale metrica delle curve, superficie e congruenze nello spazio ordinario: ma sottopone gli argomenti che fa oggetto di studio a un'indagine ampia e minuziosa, che pur guidata da vedute prevalentemente analitiche giunge però ad approfondire l'essenza geometrica degli enti considerati. I procedimenti seguiti sono più spesso scalari, ma almeno negli sviluppi ove esso porta più utili semplificazioni l'A. fa uso anche del calcolo vettoriale.

La revisione apportata alla edizione precedente riguarda specialmente le teorie del contatto e degli inviluppi, svolte (soprattutto la seconda) con insolita ampiezza nel I Capitolo: molti chiarimenti inseriti nel testo o in nota sono stati aggiunti allo scopo « di sottolineare più nettamente il ruolo della teoria delle funzioni implicite ».

Una definizione generale del *contatto* d'ordine n fra due » figure » C, C_1 è successivamente applicata ai casi in cui C, C_1 sono due curve piane, o una curva dello spazio e una superficie, o due curve spaziali, o due superficie. La definizione è questa (p. 17): C_1 ha con C nel punto (ordinario) comune A un contatto d'ordine n se preso su C_1 un punto M_1 infinitamente prossimo ad A, la distanza da M_1 a C è infinitesima d'ordine $n+1$ rispetto alla corda AM_1 quale infinitesimo principale. Cosicchè a base della teoria è posta la valutazione precisa dell'ordine della distanza infinitesima di un punto da una curva o da una superficie.

Le stesse vedute prettamente metriche sono poste a base della teoria degli *inviluppi*: ad es. per una famiglia C_α di curve piane, dipendenti da un parametro α, l'inviluppo è definito quale luogo, al variare di α, dei punti di C_α che hanno da $C_{\alpha+d\alpha}$ una distanza infinitesima d'ordine superiore a quello della distanza di un punto generico di C_α da $C_{\alpha+d\alpha}$ (p. 36). (Esclusi, s'intende, i punti singolari di C_α e i punti delle eventuali curve stazionarie della famiglia C_α). L'A. studia successivamente gli inviluppi di ∞^1 curve piane, di ∞^1 superficie, di ∞^2 superficie, di ∞^1 curve spaziali, di ∞^2 curve spaziali; fermandosi poi in modo particolare sulle famiglie ∞^1 ed ∞^2 di *rette* (rigate e congruenze).

(1) Vol. VII, 1928, pp. 56-58.

Quanto precede è nel Cap. I: i Cap. II e III contengono i primi elementi della geometria differenziale metrica delle *curve* e delle *superficie*. (È in parte rifuso, nella nuova edizione, il paragrafo dedicato alle curve su una superficie: p. 167). Dopo l'esposizione delle nozioni fondamentali sulle superficie, l'A. riprende a considerare le *congruenze di rette* soffermandosi sulle congruenze *normali* e particolarmente sulle *generatrici singolari* (a fuochi o piani focali coincidenti) di una congruenza. Termina con un cenno sulle rappresentazioni isometriche e conformi fra superficie; e con una breve Appendice sugli Immaginari e sul Calcolo Vettoriale.

ENEA BORTOLOTTI

E. H. E. TREFFTZ: *Graphostatik*. Pagg. IV+90, in 8°, con 99 fig., B. G. Teubner, Leipzig 1936. Prezzo R.M. 6.40.

Il TREFFTZ, del Politecnico di Dresda, ha scritto un eccellente volumetto di Statica Grafica. La materia è la solita che va sotto questo nome (e forse un po' più estesa): rappresentazione grafica delle forze e condizioni d'equilibrio di un corpo rigido; poligoni funicolari; strutture reticolari piane e procedimenti di CREMONA, di HEMBERG e di RITTER per il loro calcolo; determinazione dei baricentri e dei momenti d'inerzia; teoria della trave. Ma ci voleva un perfetto conoscitore della materia e un ottimo insegnante per esporla in così poche pagine con tanta nitidezza: senza nulla omettere di quauto occorre a render la trattazione autonoma e corredandola di molti esempi pratici.

L'A. nota come la Statica Grafica si segnali per il fatto che con poche idee fondamentali molto semplici raggiunge risultati di alto interesse e si augura che il libretto trovi lettori non solo fra gli studenti di ingegneria ma fra i cultori di Matematica Applicata: io condivido pienamente l'osservazione e l'augurio.

E. BOMPIANI

Factor Table, giving the complete decomposition of all numbers les than 100.000. Prepared indipendently by J. Peters A. Lodge, and E. J. Ternouth E. Gifford (London, 1935).

È questo il V° volume delle *Mathematical Tables* pubblicate dalla « British Association for Advancement of Science »: è annunciato un VI° volume dedicato alle « Funzioni di BESSEL ».

Il presente volume contiene la tavola della decomposizione in fattori primi di tutti i numeri inferiori a 100.000. Pregio peculiare è l'esattezza derivante dal confronto fra i risultati ottenuti da due coppie di calcolatori, che operarono indipendentemente l'una dall'altra, seguendo metodi diversi; e dal collaudo colle tavole precedentemente calcolate, nelle quali, tutte, si riscontrano errori segnalati nella prefazione critico-storica che alla tavola è premessa.

ETTORE BORTOLOTTI

L'Institut d'Estudis Catalans, els seus primers anys. (Barcelona, Palau de la Generalitat, 1935).

È un bel volume di 318 pagine in 8° grande, con 29 illustrazioni fotografiche e 10 ritratti in piena pagina di scienziati catalani, pubblicato nel 1935, a commemorazione del 25° anniversario della fondazione dell'Istituto.

Contiene la storia dell'opera dell'Istituto in rapporto col movimento della cultura storica, scientifica, letteraria in Catalogna, la biografia e la bibliografia completa di tutti gli scienziati catalani membri dell'Istituto.

L'Istituto comprende tre Sezioni: di *Storia ed archeologia*, di *Filologia*, di *Scienze*. Nelle sue prime sedute la sezione Storico-archeologica ha elaborato un piano di ricerche e di pubblicazioni (dipoi quasi totalmente attuato) sulla organizzazione del servizio di scavi e di esplorazioni archeologiche (prima completamente ignorato in Ispagna) sullo studio metodico dei risultati di quelle esplorazioni, e sulla storia generale, letteraria e giuridica della Catalogna nella antichità, nel Medioevo e nel rinascimento.

La sezione filologica si è anzitutto occupata della costituzione di una lingua letteraria, scientifica, di scuola e di stato catalana; coll'esame e lo studio comparativo della lingua arcaica, dei dialetti parlati nelle varie parti della Catalogna e dell'uso comune nella lingua scritta: al fine di unificare la ortografia, di depurare il lessico e di fissare la grammatica. Opera preliminare, indispensabile per dare al paese una lingua idonea a tutte le necessità di un popolo che, con fisonomia propria, affronta la complessità della vita moderna.

Tale scopo fu pienamente raggiunto e gli atti delle Sezioni, compresa quella scientifica, furono tutti pubblicati in lingua catalana. La ricca bibliografia pubblicata in questo volume fa fede della brillante rinascita della cultura catalana e del rifiorire delle arti, delle lettere, delle scienze in ogni ramo dello scibile, che in quel felice venticinquennio potè vantare la Catalogna.

ETTORE BORTOLOTTI