Bollettino Unione Matematica Italiana

Rocco Serini

Deduzione della equazione della capillarità della statica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **1** (1946), n.1, p. 31–35.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1946_3_1_1_31_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1946.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Deduzione della equazione della capillarità dalle equazioni cardinali della statica.

Nota di Rocco Serini (a Pavia).

Sunto. - *Servendosi delle equazioni cardinali della statica e del risultato relativo alla risultante e al momento risultante delle azioni capillari* [1] *si deduce l'equazione differenziale della superficie libera di un liquido pesante tenendo conto della capillarità.*

Si abbia un liquido pesante in un vaso e σ ne sia la superficie libera. Sia k il versore verticale verso il basso, δ la densità del liquido; sarà allora $\delta g k \cdot dv$ il peso dell'elemento di volume dv. Indichiamo con p la pressione in un punto interno al liquido. Isoliamo ora un volume v di liquido tutto interno alla massa limitato dalla superficie Σ: per l'equilibrio di esso dovranno essere verificate le equazioni cardinali della statica ($\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$) che nel nostro caso sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \int_v \delta g k dv + \int_\Sigma p n_i d\Sigma = 0, \\ \int_v (P - O) \wedge \delta g k dv + \int_\Sigma (P - O) \wedge p n_i d\Sigma = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, per l'arbitrarietà di v, si deduce in modo ben noto

$$(1)' \qquad p = \delta g z + \text{cost.},$$

[1] V. questo « Bollettino », serie II, anno III, n. 3, pp. 207-10. Colgo l'occasione per correggere una svista. Nella prima pagina della nota, alla riga 9, dove è detto « secondochè il vettore $P - C_i$ » si deve leggere « secondochè il vettore $C_i - P$.

mentre la seconda è identicamente soddisfatta quando lo sia la prima.

Immaginiamo ora di isolare un volume v del liquido limitato da una superficie composta di una porzione σ' della superficie libera e di una superficie Σ interna e sia C il contorno comune a σ' e Σ. Sulla superficie σ' agisca una pressione costante p_0. Applichiamo le equazioni cardinali al volume ora considerato: perciò osserviamo che oltre al peso, alla pressione p su Σ e alla pressione p_0 su σ' si dovrà considerare l'azione capillare $K\boldsymbol{n}_e ds$ sull'elemento ds della linea C, essendo $\boldsymbol{n}_e$ il versore della normale esterna a C giacente su σ. Dovremo avere perciò:

$$(2)\qquad \begin{cases} \int_v \delta g\boldsymbol{k}dv + \int_\Sigma p\boldsymbol{n}_i d\Sigma + \int_{\sigma'} p_0\boldsymbol{n}_i d\sigma' + \int_C K\boldsymbol{n}_e ds = 0, \\ \int_v (P-O)\wedge \delta g\boldsymbol{k}dv + \int_\Sigma (P-O)\wedge p\boldsymbol{n}_i d\Sigma + \\ \qquad + \int_{\sigma'} (P-O)\wedge p_0\boldsymbol{n}_i d\sigma' + \int_C (P-O)\wedge K\boldsymbol{n}_e ds = 0. \end{cases}$$

Diciamo ora σ'' una superficie infinitamente vicina a σ' e interna a v: potremo allora applicare al volume limitato da σ'' e da Σ le equazioni (1); le quali, passando al limite quando σ'' viene a coincidere con σ', daranno luogo alle due equazioni:

$$(3)\qquad \begin{cases} \int_v \delta g\boldsymbol{k}dv + \int_\Sigma p\boldsymbol{n}_i d\Sigma + \int_{\sigma'} p\boldsymbol{n}_i d\sigma' = 0, \\ \int_v (P-O)\wedge \delta g\boldsymbol{k}dv + \int_\Sigma (P-O)\wedge p\boldsymbol{n}_i d\Sigma + \int_{\sigma'} (P-O)\wedge p\boldsymbol{n}_i d\sigma' = 0. \end{cases}$$

Sottraiamo la prima delle (3) dalla prima delle (2) e la seconda dalla seconda, si avrà:

$$(2')\qquad \begin{cases} \int_{\sigma'} (p_0 - p)\boldsymbol{n}_i d\sigma' + \int_C K\boldsymbol{n}_e ds = 0, \\ \int_{\sigma'} (P-O)\wedge (p_0 - p)\boldsymbol{n}_i d\sigma' + \int_C (P-O)\wedge K\boldsymbol{n}_e ds = 0. \end{cases}$$

Ora noi abbiamo trovato, nella Nota citata, che

$$\int_C K\boldsymbol{n}_e ds = K\int_{\sigma'} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\boldsymbol{n}_i d\sigma',$$

$$\int_C (P-O)\wedge K\boldsymbol{n}_e ds = K\int_{\sigma'} (P-O)\wedge \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\boldsymbol{n}_i d\sigma',$$

quindi si ottiene dalle (2)'

$$\int_{\sigma'}\left[p_0 - p + K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right] n_i d\sigma' = 0,$$

$$\int_{\sigma'}(P - O) \wedge \left[p_0 - p + K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right] n_i d\sigma' = 0;$$

per l'arbitrarietà di σ' si deduce dalla prima:

$$\text{(A)} \qquad p_0 - p + K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0,$$

dopodichè la seconda è identicamente soddisfatta.

Tenendo conto della (1)' si ha quindi per la equazione della superficie libera

$$\text{A')} \qquad \delta g z + C - p_0 = K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

dove C è una costante e r_1 e r_2 sono i raggi principali di curvatura, col segno che loro compete prendendo come verso positivo della normale quello interno al liquido.

La (A') è una equazione differenziale, alle derivate parziali del secondo ordine, cui soddisfa la funzione $z = z(x, y)$ che rappresenta la superficie libera del liquido.

La determinazione della costante C si può fare in due modi. In primo luogo supponiamo che una regione della superficie libera sia piana: allora per i punti di essa si ha $1/r_1$ e $1/r_2$ entrambi zero.

Se prendiamo detto piano per piano $z = 0$, l'equazione (A'), osservando che il secondo membro non dipende dalla scelta degli assi perchè ha carattere intrinseco, dà $C = p_0$, e quindi la (A') diventa:

$$\text{(A'')} \qquad \delta g z = K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Si usa chiamare il piano ora detto « piano di livello ». Segue dalla (A'') che pei punti dove la superficie libera è concava si ha $z < 0$, cioè, per la scelta del verso di z, tali punti sono al di sopra del piano di livello, mentre per i punti dove la superficie libera è convessa si ha $z > 0$, ossia i punti sono al di sotto del piano di livello.

Se non si può parlare di piano di livello la determinazione della costante C deve avvenire dal calcolo del volume del liquido: problema che è molto facile nel caso che il vaso contenente il liquido sia un cilindro circolare retto. Tale determinazione si può fare senza la integrazione della (A′) quando si tenga conto della condizione al contorno di cui ora diremo ([2]).

Per determinare la z occorre aggiungere una condizione al contorno relativa alla linea C intersezione della superficie libera colla parete del vaso. Se consideriamo un elemento di tale linea si può ritenere che esso sia sottoposto alla tensione superficiale $K\boldsymbol{n}\cdot ds$ (essendo $\boldsymbol{n}$ il versore normale a C giacente su σ e interno ad essa) e ad una tensione $\alpha\boldsymbol{t}\cdot ds$, essendo $\boldsymbol{t}$, il versore normale a C, tangente alla superficie del vaso e volto verso l'interno del liquido. La costante α sta ad indicare la risultante delle azioni che sull'elemento esercitano il solido e l'ambiente (gasoso) esterno: se $\alpha > 0$ prepondera l'azione del solido. se $\alpha < 0$ quella dell'ambiente. Per l'equilibrio dell'elemento ds la risultante delle due forze deve essere normale alla superficie del vaso e quindi deve essere nulla la sua proiezione su $\boldsymbol{t}$; avremo perciò

$$K\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}ds + \alpha ds = 0.$$

Se poniamo $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t} = \cos\theta$ si ha:

$$\cos\theta = -\frac{\alpha}{K}, \tag{B}$$

quindi $\cos\theta$ è costante. È questa la condizione al contorno cercata. Questa condizione appare molto semplice nel caso che il vaso sia un cilindro circolare retto: allora la superficie libera è di rotazione intorno all'asse del cilindro e la (B) esprime che è costante l'angolo che al contorno la curva meridiana fa colle generatrici del cilindro.

A seconda che $\cos\theta \gtrless 0$ si ha che la superficie è concava o convessa e quindi si ha innalzamento o abbassamento rispetto al piano di livello.

Come esempio vogliamo dedurre, da quanto si è detto, un valore approssimato della correzione che occorre portare alla lettura barometrica per effetto della capillarità.

Prendiamo per piano $z = 0$ il piano del mercurio nella vaschetta e orientiamo l'asse z verso l'alto: allora la (A′) diventa, cambiando segno alla z,

$$-\delta g z + C - p_0 = K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right);$$

per la parte piana della superficie del mercurio si ha $z = 0$ mentre il secondo membro è zero: si deduce che $C = p_0$. D'altra parte sul

([2]) V. per es. POINCARÉ, *Capillarité*, Paris 1895, pp. 22-25.

menisco si esercita pressione nulla e quindi pel menisco

$$-\delta g z + C = K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

donde ponendo $C = p_0$

$$-\delta g z + p_0 = K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Diciamo z_m la quota del punto più alto del menisco: in quel punto, siccome la superficie è di rivoluzione intorno ad un asse passante per esso, si ha $1/r_1 = 1/r_2 = 1/R$ quindi

$$z_m = \frac{p_0}{\delta g} - \frac{2K}{\delta g} \cdot \frac{1}{R},$$

da cui

$$\frac{p_0}{\delta g} = z_m + \frac{2K}{\delta g} \cdot \frac{1}{R}.$$

Il termine $p_0/\delta g$ corrisponde alla vera altezza barometrica, mentre $2K/\delta g R$ è la correzione da apportarsi alla lettura z_m.

Per valutare la correzione, possiamo in prima approssimazione ritenere che il menisco sia una calotta sferica. Allora se r è il raggio del tubo si ha (osservando che θ è ottuso)

$$r = R\,|\cos\theta\,|,$$

quindi la correzione è

$$\frac{2K}{\delta g}\,\frac{|\cos\theta\,|}{r}.$$