Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Brusotti

Interpretazione di un teorema di Geometria elementare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **1** (1946), n.1, p. 43–47.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1946_3_1_1_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1946.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Interpretazioni di un teorema di Geometria elementare.

Nota di LUIGI BRUSOTTI (a Pavia).

Sunto. - *Di un teorema di Geometria elementare si dànno interpretazioni pertinenti alla Geometria proiettiva sulla retta complessa, alla teoria invariantiva delle forme algebriche binarie ed alla teoria della cubica gobba.*

1. Ripetutamente (¹) è stata richiamata l'attenzione sul teorema seguente di Geometria piana elementare:

Se esternamente ad un triangolo e sui lati di esso rispettivamente si costruiscono tre triangoli equilateri. i centri di questi sono vertici di un triangolo equilatero.

Si può peraltro aggiungere che alla stessa conclusione si perviene *costruendo i triangoli equilateri da banda opposta* e di più (²) che il risultato permane anche se il triangolo dato *degenera in una terna di punti allineati distinti e nei segmenti che li congiungono a due a due.*

Qui si suppongono arrecati al teorema tali complementi, mentre volutamente si esclude l'estensione al caso di tre punti non tutti distinti ed il conseguente intervento di triangoli equilateri a lati nulli.

Sotto quest'ultimo aspetto è però eccezionale il caso in cui sia equilatero lo stesso triangolo assegnato, perchè i triangoli di una delle terne costruite coincidono in questo, nel centro del quale ne coincidono dunque i centri, producendo un triangolo a lati nulli.

(¹) Cfr. per es. *Questione proposta* da O. CHISINI e *Risposte* a quella in « Period. di Mat. », (4), **1**, 1921, pp. 129 e 220-221; ivi è riportata la tradizione, accolta da A. FAIFOFER, che la questione sia stata sottoposta da NAPOLEONE BUONAPARTE a J. L. LAGRANGE.

(²) Cfr. A. CAVALLARO, *Proprietà del triangolo che si conservano al limite collineare,* « Boll. di Mat. », (4), **1**, 1940, pp. 42-43.

2. Il piano del triangolo si assuma come piano di ARGAND–GAUSS, cosicchè se ne pensino i punti come immagini di quelli di una retta intesa nel senso della variabilità complessa (il punto del piano su cui è deposto il valore z della variabile complessa essendo immagine per es. del punto della retta al quale spetti ascissa z).

È noto che le generiche proiettività sulla retta hanno per immagini trasformazioni cremoniane quadratiche mutanti cerchi in cerchi (*affinità circolari di* A. F. MÖBIUS), conservanti il verso delle rotazioni; le proiettività affini (che cioè lasciano fisso il punto all'infinito della retta) hanno però per immagini similitudini dirette. E reciprocamente (3).

D'altra parte è pur noto che, assunta sulla retta una terna di punti distinti, essa è mutata in sè da un gruppo di sei proiettività isomorfo a quello totale delle permutazioni dei tre punti e che per il relativo sottogruppo ciclico d'ordine tre sono uniti due punti costituenti la cosiddetta coppia Hessiana (4).

Poichè un triangolo equilatero è mutato in sè da un gruppo ciclico d'ordine tre di rotazioni, nel quale sono uniti il centro e l'unico punto all'infinito del piano di ARGAND–GAUSS, così esso risulta immagine di una terna della cui coppia Hessiana fa parte il punto all'infinito della retta (5). E la proprietà facilmente si inverte.

L'interpretazione che della proposizione elementare immediatamente ne scende è sostanzialmente d'indole proiettiva e conviene quindi sia enunciata sostituendo al punto all'infinito della retta un punto comunque su di essa fissato (per il che basterebbe del resto intendere z, anzichè come ascissa, come coordinata proiettiva generica).

(3) Cfr. p, es. E. BELTRAMI, *Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche*, « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna » (2), 9, 1869, pp. 607-657, oppure *Opere matematiche*, 2, Milano 1904, pp. 129-181. n. 6 e per ulteriori notizie e riferimenti L. BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen* in « Encycl. der math. Wiss. », III_2, 1922, pp. 1781-2218, a pag. 2029.

(4) Cfr. p. es. A. CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig 1872, pag. 132.

(5) Se la coppia Hessiana si presenta come quella dei punti ciascuno dei quali con quelli della terna data forma quaterna equianarmonica, la proprietà qui ricordata coincide con quella esposta in A. CLEBSCH-F. LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, 1, Leipzig 1891, pp. 635-636; 1, Leipzig und Berlin 1932 (*zweite Auflage*), pag. 851. Alla stessa conclusione si giunge peraltro adattando al caso particolare la costruzione generale per la immagine della coppia Hessiana indicata in E. BELTRAMI (3), n. 13.

Si ha così:

Data su una retta una terna

$$A,\quad B,\quad C$$

di punti distinti ed un punto M *distinto da quelli, indi introdotte le due terne di cui fa parte la coppia* BC *ed alla cui coppia Hessiana appartiene* M, *dicansi* A_1, A_2 *i punti che con* M *risp. costituiscono tale coppia Hessiana ed analogo significato abbiano* B_1, B_2, C_1, C_2 *con permutazione circolare di lettere. Allora gli indici* 1, 2 *possono assegnarsi in modo che* M *appartenga alla coppia Hessiana di ciascuna delle terne*:

$$A_1,\quad B_1,\quad C_1;$$
$$A_2,\quad B_2,\quad C_2.$$

Se però M *appartiene alla coppia Hessiana* M, H *di* A, B, C *è da porsi* $A_2 \equiv B_2 \equiv C_2 \equiv H$ *e risulta indeterminata la coppia Hessiana di* A_2, B_2, C_2, *mentre è* M, H *quella di* A_1, B_1, C_1.

Rammentando poi come, posto:

$$z = z_1 : z_2$$

e così conseguita l'omogeneità, la coppia Hessiana sia rappresentata dall'annullarsi dello Hessiano della forma binaria cubica rappresentante col suo annullarsi la terna, segue pure:

Data una forma (binaria) cubica di fattori lineari distinti

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma$$

ed una forma lineare μ *distinta da quelli, introdotte le due forme cubiche divisibili per* $\beta\gamma$ *e collo Hessiano divisibile per* μ, *dicansi* α_1, α_2 *i rispettivi rimanenti fattori lineari dello Hessiano ed analogo significato si attribuisca a* β_1, β_2, γ_1, γ_2. *Allora gli indici* 1, 2 *possono assegnarsi in modo che ciascuna delle forme cubiche*

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1,\quad \alpha_2\beta_2\gamma_2$$

abbia Hessiano divisibile per μ.

Se però lo Hessiano di $\alpha\beta\gamma$ *è divisibile per* μ *(e sia* $\equiv \mu\chi$*), è da porsi* $\alpha_2 \equiv \beta_2 \equiv \gamma_2 \equiv \chi$ *ond'è identicamente nullo lo Hessiano di* $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, *essendo poi* $\equiv \mu\chi$ *(a meno di un fattore costante) quello di* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

3. Un ulteriore passo può farsi interpretando i coefficienti della forma binaria cubica come coordinate proiettive omogenee di punto nello spazio ordinario, cosicchè ogni forma (assegnata a meno di un fattore costante) abbia nello spazio il suo *punto immagine*.

È noto allora [6] che i punti immagini dei cubi delle forme lineari sono quelli di una cubica gobba, così biunivocamente corrispondenti a tali forme lineari; anzi data una forma cubica binaria, i fattori lineari di essa corrispondono ai punti di contatto dei tre piani osculatori condotti alla curva dal punto immagine e quelli dello Hessiano ai due punti d'appoggio della corda condotta dal punto immagine alla curva.

Tenendo conto di tutto ciò si giunge alla proposizione seguente:

Data una cubica gobba, assunto un punto P *fuori della sviluppabile delle tangenti, indi un punto* M *sulla curva ma fuori dei piani osculatori uscenti da* P, *del triedro da questi formato si introducano gli spigoli*

$$a, \quad b, \quad c,$$

e dicasi Γ *il cono quadrico proiettante da* M *la curva; siano allora:*

$$A_1,\ A_2;\quad B_1,\ B_2;\quad C_1,\ C_2 \tag{1}$$

le coppie di punti in cui a, b, c *risp. incontrano* Γ. *Si proietti ciascun punto* (1) *da* M *sulla curva e, considerato il piano osculatore nel punto proiezione, dicansi ordinatamente*

$$\alpha_1,\ \alpha_2;\quad \beta_1 .\ \beta_2;\quad \gamma_1,\ \gamma_2$$

tali piani. Si possono allora assegnare gli indici 1, 2 *in modo che i punti*

$$N_1 \equiv \alpha_1\beta_1\gamma_1$$
$$N_2 \equiv \alpha_2\beta_2\gamma_2$$

giacciano su Γ.

Se però il punto P *è su* Γ *e sono* M, H *i punti di appoggio della corda uscente da* P, *è da porsi* $A_2 \equiv B_2 \equiv C_2 \equiv P$, *onde* $\alpha_2 \equiv \beta_2 \equiv \gamma_2$ *ed (al limite)* $N_2 \equiv H$, *essendo poi* N_1 *sulla* NH.

Accanto a questa varrà la proposizione duale nello spazio, per il che giova ricordare che ente duale della cubica gobba è il sistema dei piani ad essa osculatori.

4. I teoremi che qui si sono andati deducendo da quello di Geo-

[6] Cfr. sull'argomento: G. Pittarelli, *La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche*, « Giornale di Matematiche », **17**, 1879, pp. 260-310; R. Sturm, *Darstellung binärer Formen über cubischen Raumcurve*, « Journal für die reine und ang. Math. », **86**, 1879, pp. 116-146; L. Berzolari, *Intorno alla rappresentazione delle forme cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba*, « Rend. Circ. mat. di Palermo », **5**, 1891, pp. 9-32, 33-50.

metria elementare, per quanto non sembrino facilmente prevediblli direttamente. non hanno forse grande rilievo.

Ma non è certo privo d'interesse il nuovo esempio ch' essi offrono di rapporti anche insospettati fra campi d'indagine apparentemente lontani.