Bollettino
Unione Matematica Italiana

Salvatore Amante

Sulle funzioni analitiche numerico-integrali di una o più funzioni numeriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 109–117.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Sulle funzioni analitiche numerico-integrali di una o più funzioni numeriche.

Nota di SALVATORE AMANTE (a Messina).

Sunto. - *In questa nota si estendono alle potenze integrali con esponenti reali delle funzioni numeriche le regole ordinarie del calcolo delle potenze, si stabilisce una goniometria per le funzioni numerico-integrali e si dà infine uno sviluppo in serie di* TAYLOR *per le funzioni analitiche numerico-integrali di due funzioni numeriche.*

1. In precedenti note (1) ho dimostrato che:

Se r *è il raggio di convergenza della serie:*

(1) $$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m + \dots$$

(1) S. AMANTE: *Sulle funzioni analitiche numerico integrali.* « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo XL, anno 1936; *Sulle serie numerico-integrali*, rivista « Le Matematiche », vol. I, fasc. 3°, « Casa del libro », Catania 1946.

la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie

$$(2) \qquad a_0\alpha(n) + a_1 f^{x^1}(n) + a_2 f^{x^2}(n) + \dots + a_m f^{x^m}(n) + \dots$$

sia assolutamente convergente è che si abbia:

$$(3) \qquad |f(1)| < r.$$

È questo il perfezionamento di un altro teorema del Prof. M. CIPOLLA [2] nel senso che alle condizioni $|f(d)| < r$ per tutti i divisori d di n, sufficienti per la convergenza assoluta della (2), viene sostituita l'unica condizione (3) la quale è pure necessaria.

Detto teorema si utilizza per definire la funzione analitico numerico integrale: se $\psi(z)$ è la funzione analitica definita dalla serie (1) entro il suo cerchio di convergenza ed $f(n)$ una funzione numerica tale che $|f(1)| < r$, si denota con $\psi(f^x(n))$ la funzione numerica definita dalla serie (2) e si chiama *la funzione ψ analitica numerico-integrale di* f(n).

Il CIPOLLA stabilisce pure [3] lo sviluppo in serie analogo a quello di TAYLOR per le funzioni analitiche numerico-integrali dimostrando che:

Se r *è il raggio di convergenza della serie di potenze* (1) *e se* f(n) *e* g(n) *sono due funzioni numeriche tali che per ogni divisore* d *di* n *si ha sempre:*

$$(4) \qquad |f(d)| < r, \qquad |f(d) + g(d)| < r$$

allora vale la formula analoga a quella di Taylor:

$$(5) \quad \Psi((f+g)^\alpha(n)) = \Psi(f^\alpha(n)) + \frac{1}{1!} g^{x^1}(n) x \Psi'(f^x(n)) + \frac{1}{2!} g^{x^2}(n) x \Psi''(f^x(n)) + \dots + \frac{1}{m!} g x^m(n) x \Psi^{(m)}(f^x(n)) + \dots .$$

Ora è da osservare che il perfezionamento da me apportato al primo teorema si riflette su quest'altro nel senso che alle condizioni (4), senza nulla modificare nella dimostrazione, si possono sostituire le sole condizioni:

$$(6) \qquad |f(1)| < r \qquad |f(1) + g(1)| < r$$

e pertanto si può dire che:

Se r *è il raggio di convergenza della serie di potenze* (1) *e se*

(2) M. CIPOLLA: *Specimen de Calculo arithmetico-integrale*, rivista «de Mathematica», t. 9, a. 1909; *Sui principi del calcolo aritmetico-integrale.* «Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania», serie 5ª, vol. VIII, 1915.

(3) CIPOLLA: n. c.

f(n) *e* g(n) *sono due funzioni numeriche soddisfacenti alle condizioni* (6) *allora vale la formula* (5) *analoga a quella di Taylor.*

La (5) opportunamente trasformata rende sempre possibile la determinazione della somma della serie (2). Vi si muti infatti $f(n)$ in $f(1)\alpha(n)$ e $g(n)$ in $f(n)-f(1)\alpha(n)$ e si osservi che la seconda delle condizioni (6) è soddisfatta in conseguenza della prima; si ottiene allora:

$$\Psi(f^{x}(n)) = \tag{7}$$
$$\alpha(n)\Psi(f(1)) + \frac{(f-\alpha f(1))^{x^1}(n)}{1!}\Psi'(f(1)) + \frac{(f-\alpha f(1))^{x^2}(n)}{2!}\Psi''(f(1)) + \ldots$$

ed il secondo membro di questa uguaglianza ha un numero finito di termini perchè si ha:

$$(f-\alpha f(1))^{x^m}(n) = 0.$$

non appena m supera il numero $\tau(n)$ dei fattori primi uguali o disuguali secondo cui si decompone n. Pertanto si può assumere l'uguaglianza (7) come definizione di $\Psi(f^{x}(n))$ se $\Psi(z)$ è una funzione analitica della variabile complessa z. monogena in una regione che contiene il punto $f(1)$.

Una prima applicazione della formula (7) si ha ponendo $\Psi(x)=x^s$, essendo s un numero reale qualunque. Si ottiene così l'espressione del cointegrale di $f(n)$ di grado s:

$$f^{x^s}(n) = \alpha(n)f^s(1) + \frac{s}{1!}f^{s-1}(1)(f-\alpha f(1))^{x^1}(n) + \tag{8}$$
$$+ \frac{s(s-1)}{2!}f^{s-2}(1)(f-\alpha f(1))^{x^2}(n) + \ldots$$

dov'è da supporre $f(1) \neq 0$.

Se nella (8) poniamo r al posto di s e moltiplichiamo integralmente la formula così ottenuta membro a membro per la (8) stessa, otteniamo:

$$f^{x^r}(n) x f^{x^s}(n) = \alpha(n)f^{s+r}(1) + \sum_{t=1}^{\infty}\binom{s+r}{t} f^{s+r-t}(1)(f-\alpha f(1))^{x^t}(n).$$

Il secondo membro di questa relazione, in virtù della (8), è $f^{x^{s+r}}(n)$; quindi ha luogo la seguente:

$$f^{x^s}(n) x f^{x^r}(n) = f^{x^{r+s}}(n)$$

qualunque siano i numeri reali r ed s purchè $f(1)$ sia diverso da zero se uno almeno dei due numeri r ed s non è intero positivo, relazione che estende al prodotto integrale di due cointegrali la nota regola del prodotto di potenze aventi la stessa base ed esponenti numeri reali qualunque.

Si osservi inoltre che qualunque siano i numeri reali r ed s, in base alla (8), si ha:

$$(f^{x^s}(n))^{x^r} = \Big[\alpha(n)\cdot f^s(1) + \frac{s}{1!} f^{s-1}(1)(f - \alpha f(1))^{x^1}(n) + \\ + \frac{s(s-1)}{2!} f^{s-2}(1)(f - \alpha f(1))^{x^2}(n) + \ldots\Big]^{x^r}$$

e sempre in base alla (8), tenendo presente che è:

$$(f - \alpha f(1))^{x^t}(1) = 0$$

qualunque sia l'intero positivo t, si ottiene:

$$(f^{x^s}(n))^{x^r} = \alpha(n) f^{x^{sr}}(1) + \sum_{k=1}^{\tau(n)} \binom{r}{k} f^{s(r-k)}(1) \cdot \\ \cdot \Big[\alpha(n) f^s(1) + \sum_{h=1}^{\tau(n)} \binom{s}{h} f^{s-h}(1)(f - \alpha f(1))^{x^h}(n) - \alpha(n) f^s(1)\Big]^{x^k}$$

cioè:

$$(f^{x^s}(n))^{x^r} = \alpha(n) f^{sr}(1) + \sum_{k=1}^{\tau(n)} \binom{r}{k} f^{s(r-k)}(1) \cdot \\ \cdot \Big[\sum_{h=1}^{\tau(n)} \binom{s}{h} f^{s-h}(1)(f - \alpha f(1))^{x^h}(n)\Big]^{x^k},$$

e riducendo, segue:

$$(f^{x^s})^{x^r} = \alpha(n) f^{sr}(1) + \frac{rs}{1!} f^{rs-1}(1)(f - \alpha f(1))^{x^1}(n) + \\ + \frac{rs(rs-1)}{2!} f^{rs-2}(1)(f - \alpha f(1))^{x^2}(n) + \ldots .$$

Il secondo membro è ciò che diventa il secondo membro di (8) quando al posto di s si pone $r \cdot s$, pertanto si deduce:

$$(f^{x^s}(n))^{x^r} = f^{x^{rs}}(n).$$

Questa relazione estende la nota regola per il calcolo della potenza integrale di una potenza integrale ad esponenti interi al caso di esponenti reali relativi, in analogia a quanto avviene nel calcolo ordinario delle potenze.

In modo analogo, sempre per s reale qualunque, si può mostrare che si ha:

$$(f(n) x g(n))^{x^s} = f^{x^s}(n) x g^{x^s}(n)$$

onde *tutte le regole relative al calcolo delle potenze ad esponenti reali valgono anche quando si tratti di prodotti e potenze integrali.*

Assumendo nella (2) $\Psi(x) = \operatorname{sen} x$ e poi $\Psi(x) = \cos x$ otteniamo:

$$\operatorname{sen} f^x(n) = \frac{f^{x^1}(n)}{1!} - \frac{f^{x^3}(n)}{3!} + \frac{f^{x^5}(n)}{5!} - \ldots$$

$$\cos f^x(n) = \alpha(n) - \frac{f^{x^2}(n)}{2!} + \frac{f^{x^4}(n)}{4!} - \frac{f^{x^6}(n)}{6!} + \ldots$$

ed in termini finiti dalla (7):

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{sen} f^x(n) = \alpha(n) \operatorname{sen} f(1) + \frac{(f - \alpha f(1))^{x^1}(n)}{1!} \cos f(1) - \\ - \frac{(f - \alpha f(1))^{x^2}(n)}{2!} \operatorname{sen} f(1) + \dots$$

$$\text{(10)} \qquad \cos f^x(n) = \alpha(n) \cos f(1) - \frac{(f - \alpha f(1))^{x^1}(n)}{2!} \operatorname{sen} f(1) - \\ - \frac{(f - \alpha f(1))^{x^2}(n)}{2!} \cos f(1) + \dots .$$

Utilizzando le (9) e (10) per formare l'espressione:

$$(\operatorname{sen} f^x(n))x(\cos \varphi^x(n)) + (\operatorname{sen} \varphi^x(n))x(\cos f^x(n))$$

si ricava:

$$\alpha(n) \operatorname{sen} [f(1) + \varphi(1)] + \frac{[(f + \varphi) - \alpha \cdot (f(1) + \varphi(1))]^{x^1}(n)}{1!} \cos [f(1) + \varphi(1)] - \\ - \frac{[(f + \varphi) - \alpha \cdot (f(1) + \varphi(1))]^{x^2}(n)}{2!} \operatorname{sen} [f(1) + \varphi(1)] + \dots$$

e questa non è altro che l'espressione di $\operatorname{sen} [(f + \varphi)^x(n)]$, quindi si ha:

$$\operatorname{sen} [(f + \varphi)^x(n)] = (\operatorname{sen} f^x(n))x(\cos \varphi^x(n)) + (\operatorname{sen} \varphi^x(n))x(\cos f^x(n))$$

che è la nota formula di addizione relativa al seno trasportata alle funzioni numerico-integrali.

In modo analogo possono stabilirsi nel campo delle funzioni numerico-integrali le formule analoghe a quelle della goniometria ordinaria tutte ottenendole interpretrando prodotti e quozienti ordinari come prodotti integrali e quozienti integrali.

2. Il procedimento seguito per definire la funzione analitica numerico-integrale di una funzione numerica si presta ad essere opportunamente utilizzato per definire la funzione analitica numerico-integrale di due funzioni numeriche.

A tal fine incominciamo con l'osservare che tenuto conto di quanto è stato detto sulla serie (2) e di quanto è noto sulle serie doppie di potenze è immediato il *teorema*:

Se la serie doppia di potenze:

$$\text{(11)} \qquad \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{uv} z_1^u z_2^v$$

converge assolutamente per la coppia di valori $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ delle variabili di moduli $|\bar{z}_1| > 0$, $|\bar{z}_2| > 0$ *e se:*

$$|f(1)| < r_1 < |\bar{z}_1|, \qquad |\varphi(1)| < r_2 < |\bar{z}_2|$$

allora la serie:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv} f^{x^u}(m)\varphi^{x^v}(n)$$

è assolutamente convergente.

Ma allora, poichè sono assolutamente convergenti le serie:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv} f^{x^u}(d)\varphi^{x^v}\left(\frac{n}{d}\right)$$

relative a tutti i divisori d di n, sarà pure assolutamente convergente la serie:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv} \sum_{d \supset n} f^{x^u}(d)\varphi^{x^v}\left(\frac{n}{d}\right)$$

cioè la serie:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv}(f^{x^u} x \varphi^{x^v})(n).$$

Pertanto è dimostrato il *teorema*:

Se la serie doppia di potenze:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv} z_1{}^u z_2{}^v$$

converge assolutamente per la coppia di valori $\bar{z}_1$, z_2 *delle variabili di moduli* $|z_1| > 0$, $|z_2| > 0$ *e se*

$$|f(1)| < r_1 < |\bar{z}_1|, \qquad |\varphi(1)| < r_2 < |\bar{z}_2|$$

allora la serie:

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv}(f^{x^u} x \varphi^{x^v})(n) \tag{12}$$

è assolutamente convergente.

Se $\Psi(z_1, z_2)$ è la funzione analitica definita dalla serie (11) nel suo campo di convergenza ed $f(n)$ e $\varphi(n)$ sono due funzioni numeriche tali che $|f(1)| < r_1$, $|\varphi(1)| < r_2$, si denota con $\Psi(f^x(n). \varphi^x(n))$ la funzione numerica definita dalla serie (12) e si chiama la *funzione analitica numerico-integrale delle due funzioni* f(n), $\varphi(n)$.

Quest' ultimo teorema ci permette di stabilire uno sviluppo in serie di Taylor per le funzioni analitiche numerico-integrali di due funzioni numeriche, precisamente ha luogo il *teorema*

Se la serie doppia di potenze (11) *converge assolutamente per* $|z_1| < r_1$ *e* $|z_2| < r_2$ *e se* f(n), $f_1(n)$, $\varphi(n)$, $\varphi_1(n)$ *sono funzioni numeriche tali che si abbia*:

$$|f(1)| < r_1, \qquad |f(1) + f_1(1)| < r_1$$
$$|\varphi(1)| < r_2, \qquad |\varphi(1) + \varphi_1(1)| < r_2$$

allora vale la formula analoga a quella di Taylor :

$$(13)\qquad \Psi[(f + f_1)^x(n),\ (\varphi + \varphi_1)^x(n)] =$$
$$= \Psi[f^x(n),\ \varphi^x(n)] + \frac{1}{1!}\left[f_1(n)\,x\,\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial f} + \varphi_1(n)\,x\,\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial\varphi}\right]^1 +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f_1{}^x(n)x\,\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial f} + \varphi_1{}^x(n)\,x\,\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial\varphi}\right]^2 + \dots .$$

Infatti, in base alle condizioni :

$$|f(1) + f_1(1)| < r_1, \quad |\varphi(1) + \varphi_1(1)| < r_2$$

possiamo applicare la (12) e scrivere :

$$\Psi[(f + f_1)^x(n),\ (\varphi + \varphi_1)^x(n)] = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv}(f + f_1)^{x^u}(n)x(\varphi + \varphi_1)^{x^v}(n) =$$
$$= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{uv}\left[\sum_{s=0}^{u}\binom{u}{s}f^{x^{u-s}}(n)xf_1{}^{x^s}(n)\right] x \left[\sum_{t=0}^{v}\binom{v}{t}\varphi^{x^{v-t}}(n)x\varphi_1{}^{x^t}(n)\right].$$

e invertendo i simboli di sommatoria :

$$(14)\qquad \Psi[(f + f_1)^x(n),\ (\varphi + \varphi_1)^x(n)] =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(f_1{}^{x^s}\,x\,\varphi_1{}^{x^t})(n)\,x\sum_{u=s}^{\infty}\sum_{v=t}^{\infty} a_{uv}\binom{u}{s}\binom{v}{t}(f^{x^{u-s}}\,x\,\varphi^{x^{v-t}})(n).$$

Ma, per $|z_1| < r_1$ e $|z_2| < r_2$ e qualunque siano gl'interi positivi s, t esiste :

$$\frac{\partial^{s+t}\Psi(z_1,\ z_2)}{\partial z^s{}_1\partial z_2{}^t}$$

ed è rappresentata dalla serie :

$$\frac{\partial^{s+t}\Psi(z_1,\ z_2)}{\partial z_1{}^s\ \partial z_2{}^t} = \sum_{u=s}^{\infty}\sum_{v=t}^{\infty} a_{uv}\binom{u}{s}\binom{v}{t}s!\ t!\,z_1{}^{u-s}z_2{}^{v-t},$$

quindi, essendo per ipotesi $|f(1)| < r_1$, $|\varphi(1)| < r_2$, per definizione di funzione analitica numerico integrale di due funzioni numeriche, è lecito scrivere :

$$\frac{\partial^{s+t}\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial f^s\partial\varphi^t} = \sum_{u=s}^{\infty}\sum_{v=t}^{\infty} a_{uv}\binom{u}{s}\binom{v}{t}s!\,t!\,f^{x^{u-s}}(n)\,x\,\varphi^{x^{v-t}}(n)$$

e però la (14) diviene :

$$\Psi[(f + f_1)^x(n),\ (\varphi + \varphi_1)^x(n)] =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(f^{x^s}\,x\,\varphi_1{}^{x^t})(n)\,x\,\frac{1}{s!\,t!}\,\frac{\partial^{s+t}\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial f^s\partial\varphi^t}$$

e questa non è altro che la (13).

La somma della serie che dà $\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))$ è un caso particolare di quest' ultima. Vi si muti infatti:

$$\begin{array}{lll} f(n) & \text{in} & f(1)\alpha(n) \\ f_1(n) & \text{in} & f(n) - f(1)\alpha(n) \\ \varphi(n) & \text{in} & \varphi(1)\alpha(n) \\ \varphi_1(n) & \text{in} & \varphi(n) - \varphi(1)\alpha(n), \end{array}$$

si ottiene:

$$\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n)) = \alpha(n)\Psi(f(1),\ \varphi(1)) +$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!}\left[(f(n) - f(1)\alpha(n))^x\, x\, \frac{\partial\Psi(f(1),\ \varphi(1))}{\partial f}\,\alpha(n) + (\varphi(n) - \right.$$
$$\left. - \varphi(1)\alpha(n))^x\, x\, \frac{\partial\Psi(f(1),\ \varphi(1))}{\partial\varphi}\,\alpha(n)\right]^p$$

cioè:

$$\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n)) = \alpha(n)\Psi(f(1),\ \varphi(1)) + \tag{15}$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!}\left[(f(n) - f(1)\alpha(n))^x\left(\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))}{\partial f}\right)_{n=1} + \right.$$
$$\left. + \varphi(n) - \varphi(1)\alpha(n)^x\left(\frac{\partial\Psi(f^x(n),\ \varphi^y(n))}{\partial\varphi}\right)_{n=1}\right]^p$$

che è la *formula analoga a quella di Taylor per le funzioni di due variabili*; essa offre il vantaggio rispetto alla (12) di rendere sempre possibile la somma della (12) stessa dato che ha un numero finito di termini perchè:

$$(f - f(1)\alpha)^{x^s}(n) = 0, \qquad (\varphi - \varphi(1)\alpha)^{x^t}(n) = 0$$

non appena s e t superano $\tau(n)$.

Pertanto, quando sono soddisfatte le condizioni in precedenza dette, si può assumere l' uguaglianza (15) come definizione di $\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))$.

La formula (15) poteva ottenersi in altro modo.

Infatti, considerata la $\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n))$ come funzione della sola $f(n)$ si ha:

$$\Psi(f^x(n),\ \varphi^x(n)) = \alpha(n)\Psi(f(1),\ \varphi^x(n)) + \tag{16}$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(f - \alpha f(1)(n)^{x^s}(n)}{s!}\, \frac{\partial^s\Psi}{\partial f^s}(f(1),\ \varphi^x(n)$$

ed inoltre si ha pure:

$$\frac{\partial^s\Psi(f(1),\ \varphi^x(n))}{\partial f^s} = \alpha(n)\,\frac{\partial^s\Psi(f(1),\ \varphi(1))}{\partial f^s} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\varphi - \alpha\varphi(1))^{x^t}(n)}{t!}\,\frac{\partial^{s+t}\Psi(f(1), \varphi(1))}{\partial f^s \partial\varphi^t}$$

per $s = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Moltiplicando quest'ultima integralmente per $\frac{(f - \alpha f(1))^{x^s}(n)}{s!}$ e sommando rispetto ad s, la somma dei primi membri dà, in virtù della (16), $\Psi(f^x(n), \varphi^x(n))$ mentre la somma dei secondi membri dà il secondo membro della (15).

Le estensioni relative alle funzioni analitiche numerico-integrali di più di due funzioni numeriche, dopo quanto precede, sono immediate.